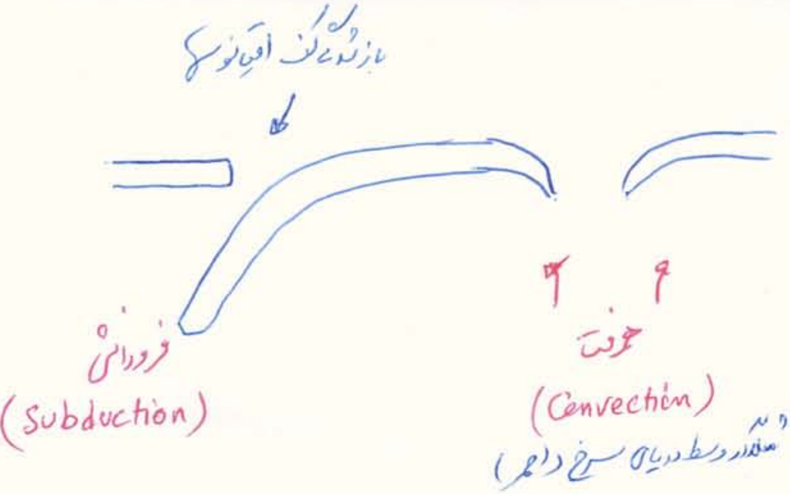
درباره صفحات زمین :



- سطح زمین از یک پوسته کلفت ($\simeq 100$ km) تشکیل شده و در زیر آن ماده حالت خمیری دارد.
- این صفحه در واقع از خود گوشته تشکیل شده و در ادامه در آن فرو می‌رود و ذوب می‌شود (فرورانش)
- سن این صفحات حداکثر ۲۰۰ میلیون سال است.
- قاره‌ها با این صفحات تفاوت دارند. قاره‌ها صفحات ضخیم‌تری هستند که سنی در حدود یک میلیارد سال دارند (حداکثر ۳۸۰۰ میلیون سال)
- قاره‌ها بر روی گوشته شناورند و داخل آن فرو نمی‌روند (مانند چوب پنبه)

کره زمین دارای ۷ صفحه است : ۱- صفحه آفریقا

۲- صفحه اوراسیا

۳- صفحه اقیانوس هند

۴- صفحه اقیانوس آرام

۵- صفحه قطب جنوب

۶- صفحه آمریکا

۷- صفحه نازکا

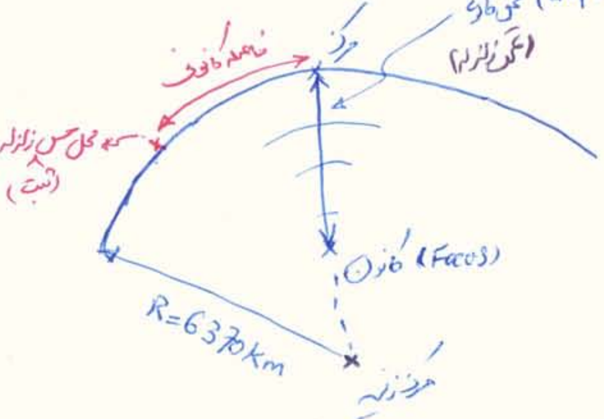
An earthquake is a sudden motion of the earth surface,
originating in a limited underground region,
due to disturbance of the elastic equilibrium at the rock mass
and spreading from there in all directions.

زلزله :

مرکز زلزله : (Focus, hypocenter) : مرکز توده سنگی که بالک‌ای در زلزله شروع شده است .

کانون زلزله : (epicenter) : تصویر مرکز زلزله بر روی سطح کره زمین را کانون زلزله می‌نامند .

عمق کانون (عمق زلزله) (depth of the Focus) ⟶ تا حداکثر 700^{km} می‌تواند باشد. ولی اغلب تا ۵۰ کیلومتر است



فاصله کانونی : (epicentral distance)

فاصله محل احساس (ثبت) زلزله تا مرکز زلزله ،
عموماً با زاویه بیان می‌شود . و باید توجه داشته باشیم که هر درجه عرض یا طول جغرافیایی تقریباً $\underline{\underline{111}}^{km}$ است . (بیشترین آن ۱۸۰ درجه نمی‌تواند باشد)

زلزله‌ها
۱- نزدیک Near (با فاصله کانونی کمتر از ۱۰ درجه)
۲- دور distant

زلزله‌ها
۱- سطحی Shallow Focus
۲- نرمال Normal Focus
۳- عمیق Deep Focus

* ماهیت زلزله با انفجار کاملاً متفاوت است . همچنین متفاوت است با :
- ریزش غارهای زیرزمینی
- زمین لغزش
- لغزش سنگی در معادن
- فوران آتشفشان (volcanic eruption)

تکتونیک (Tectonic) زلزله ناشی از جمع شدن تدریجی انرژی در لایه‌های زمین و آزاد شدن آن در هنگام وقوع زلزله است. این نوع لرزه‌ها (فعالیت‌ها) تکتونیکی گویند.

* مشهود است که امکان دسترسی به کانون زلزله و دریافت اطلاعات از عمق آن امکان‌پذیر نمی‌باشد. از این رو باید با اطلاعاتی که در سطح زمین کسب می‌کنیم درباره زلزله و نحوه ایجاد آن قضاوت نمائیم.

* از این رو نظریه (تئوری) تکتونیک صفحه‌ای (plates tectonic theory) پیشنهاد شد که مورد قبول دانشمندان و مهندسین قرار گرفت.
در این تئوری، پوسته زمین از صفحاتی تشکیل شده که دارای گسل می‌باشند.

گسل (Fault): هر نوع ناپیوستگی یا زمین‌شناسی که در راستای آن تغییر مکان رخ داده باشد.

زلزله سانفرانسیسکو یکی از مثال‌های آشکار شکستگی در سطح گسل‌هاست.

San Francisco, California, USA

April 18, 1906

Magnitude : 8.3

San Andreas Fault, broke from San Juan to Upper Hattole along 430 km length

Strike-Slip up to 6.3 m

* همه گسل‌ها بر روی سطح زمین رخنمون ندارند. (blind Faults)

حرکت ناگهانی در راستای یک گسل به انرژی بسیار زیاد احتیاج دارد. این انرژی در طول زمان در پوسته زمین ذخیره می‌گردد.

درخت‌هایی که در امتداد گسل سان آندریاس در یک راستا کاشته شده بودند پس از گذشت زمان (چند سال) بصورت منحنی درآمدند وقتی در سال ۱۹۰۶

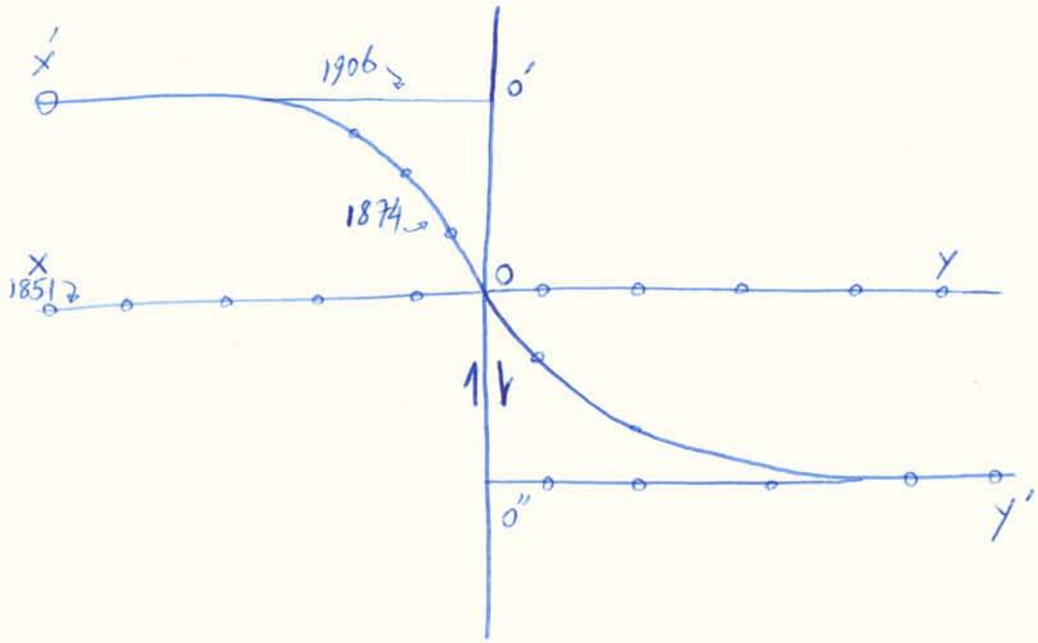
زلزله سانفرانسیسکو اتفاق افتاد، هر خط از این درخت‌ها به دو خط مجزا تبدیل شدند!

(۸٫۳ ریشتر)

این مسئله منجر به پیشنهاد تئوری elastic Rebound Theory توسط H.F. Reid شد. براساس این تئوری،

The source منشأ انرژی زلزله‌های تکتونیکی، انرژی کرنش الاستیک ذخیره شده در سنگهاست. وقتی که این انرژی در طول زمان افزایش یافته و به حد الاستیک خودش رسید (مقاومت سنگها)، گسیختگی اتفاق می‌افتد. پس از آن سنگهای شکسته شده در موقعیت جدیدی به تعادل استاتیکی می‌رسند.

* این مسئله باعث بوجود آمدن پس‌لرزه‌ها می‌گردد که اغلب در زلزله‌های بزرگ اتفاق می‌افتد. *



سال 1851 : درختها در حالت xy

سال 1874 : " " x'oy'

پس از 1906 : " " x o' , o''y'

گسل سان آندریاس (۳۰۰ km) باعث بوجود آمدن زلزله السنترو (El centro) در سال ۱۹۴۰ با بزرگای 7.1 شد. در این زلزله یک گسل ۶۰ کیلومتری با لغزش ۵ متر شناسایی شد.

انواع گسل‌ها: (برحسب هندسه و حرکت نسبی آن)

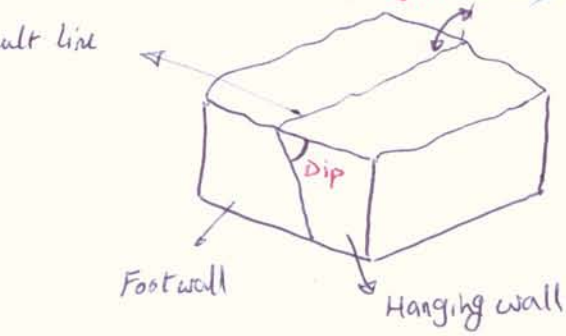
1- گسل امتدادلغز — Strike slip

2- گسل نرمال (عادی) — Normal (بر اثر حرکات کششی)

3- گسل وارونه — Reverse (" " فشاری)

طبقه‌بندی بر اساس ← براساس هندسه و جهت حرکت نسبی گسل می‌باشد.

- حداکثر حرکت گسل می‌تواند 30mm تا 100mm در سال باشد (مانند سان آندریاس و Nakai در ژاپن) Tectonic Creep
- تغییر شکل گسل در هنگام زلزله نیز می‌تواند از 1cm تا 20m باشد.
- گسل معلول زلزله است نه علت آن.
- هر گسل متشکل از چندین گسل است. در یک زلزله کل طول گسل حرکت نمی‌کند.



زاویه شیب Dip: The angle that fault surface makes with a horizontal plane.

زاویه امتداد Strike: The direction of the fault line exposed at the ground surface relative to the north.

. strike-slip fault / transcurrent fault: involves displacements of rock laterally, parallel to the strike.

اگر بر روی یکی از دو جهت گسل بایستیم، و حرکت جهت دیگر را از چپ به راست ببینیم آنگاه گسل راستگرد (right-lateral) است

" " " " " راست به چپ " چپگرد left-lateral است

. Dip-slip fault: is one in which the motion is largely parallel to the dip of the fault and thus has vertical components of displacement.

.1. Normal Fault: فرادیواره به سمت پایین حرکت می‌کند.

.2. Reverse Fault: فرادیواره به سمت بالا حرکت می‌کند.

در اغلب حالتها در واقعیت، لغزش گسل ترکیبی از دو حالت فوق است که oblique faulting نامیده می‌شود.

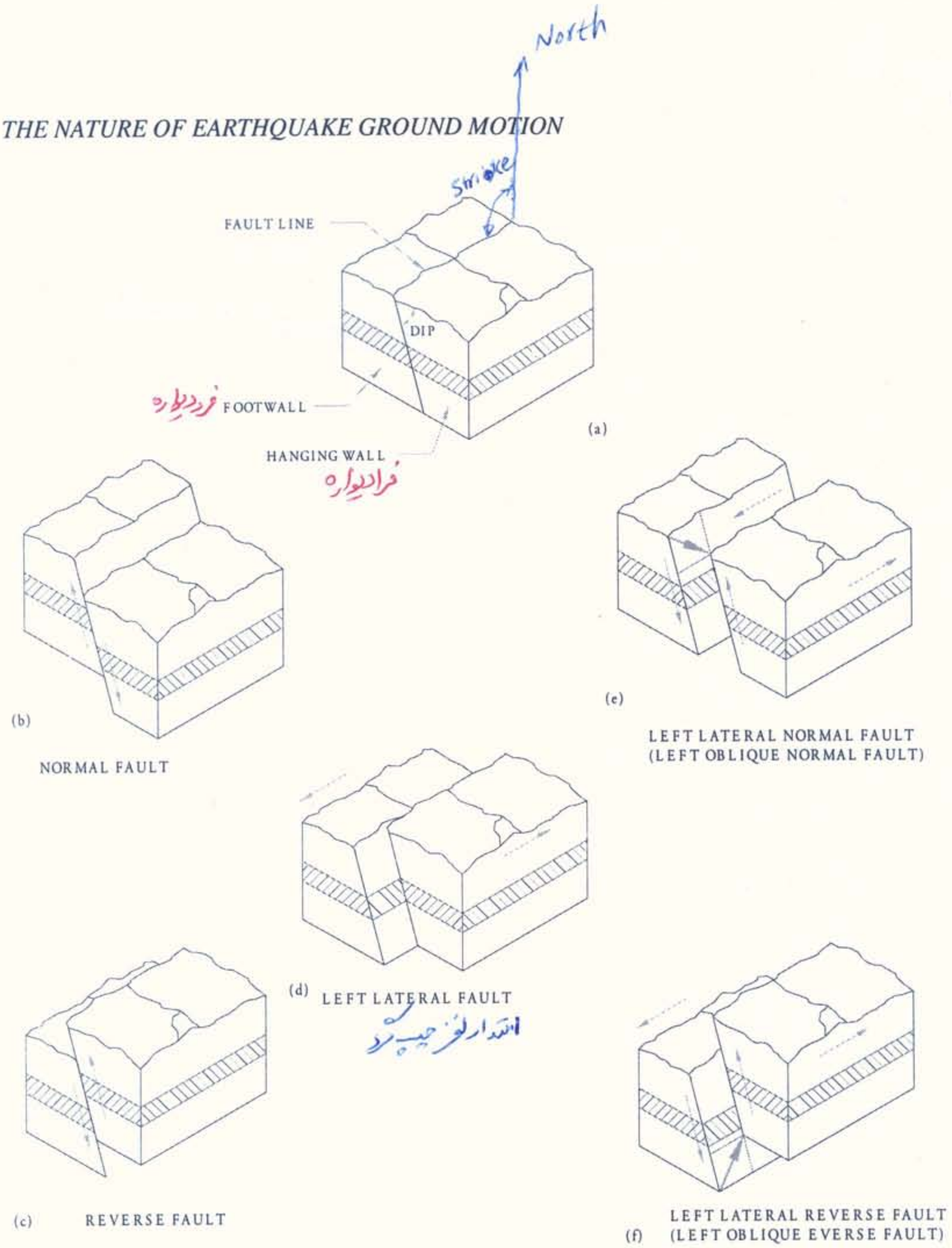


Figure 1-10. Diagrammatic sketches of fault types

The classification of faults depends only on the geometry and direction of relative slip. Various types are sketched in Figure 1-10. The *dip* of a fault is the angle that fault surface makes with a horizontal plane and the *strike* is the direction of the fault line exposed at the ground surface relative to the north.

A *strike-slip* fault, sometimes called a transcurrent fault, involves displacements of rock laterally, parallel to the strike. If when we stand on one side of a fault and see the motion on the other side is from left to right, the fault is *right-lateral* strike-slip. Similarly, we can identify *left-lateral* strike-slip.

A *dip-slip* fault is one in which the motion is largely parallel to the dip of the fault and thus has vertical components of displacement. A *normal* fault is one in which the rock above the inclined fault surface moves downward relative to the underlying crust. Faults with almost vertical slip are also included in this category.

A *reverse* fault is one in which the crust above the inclined fault surface moves upward relative to the block below the fault. *Thrust* faults are included in this category but are generally restricted to cases when the dip angle is small. In *blind thrust faults*, the slip surface does not penetrate to the ground surface.

In most cases, fault slip is a mixture of strike-slip and dip-slip and is called *oblique* faulting.

For over a decade it has been known that displacement in fault zones occurs not only by sudden rupture in an earthquake but also by slow differential slippage of the sides of the fault. The fault is said to be undergoing *tectonic creep*. Slippage rates range from a few millimeters to several centimeters.

The best examples of fault creep come from the San Andreas zone near Hollister, California, where a winery built straddling the fault trace is being slowly deformed; in the town, sidewalks, curbs, fences and homes are being offset. On the Hayward fault, on the east side of San Francisco Bay, many structures are being deformed and even seriously damaged by slow slip, including a large water supply tunnel, a drainage culvert and railroad tracks that intersect the zone.

Horizontal fault slippage has now also been detected on other faults around the world, including the north Anatolian fault at Ismetpasa in Turkey and along the Jordan Valley rift in Israel. Usually, such episodes of fault slip are *aseismic*-that is, they do not produce local earthquakes.

It is sometimes argued that a large damaging earthquake will not be generated along a fault that is undergoing slow fault slip, because the slippage allows the strain in the crustal rocks to be relieved periodically without sudden rupture. However, an alternative view is also plausible. Almost all fault zones contain a plastic clay-like material called *fault gouge*. It may be that, as the elastic crystalline rocks of the deeper crust stain elastically and accumulate the energy to be released in an earthquake, the weak gouge material at the top of the fault zone is carried along by the adjacent stronger rock to the side and underneath. This would mean that the slow slip in the gouge seen at the surface is an indication that strain is being stored in the basement rocks. The implication of this view is that, on portions of the fault where slippage occurs, an earthquake at depth could result from sudden rupture, but surface offset would be reduced. On the portion where slippage is small or nonexistent, offsets would be maximum. A prediction of this kind can be checked after earthquakes occur near places where slippage is known to be taking place.

Sometimes aseismic slip is observed at the ground surface along a ruptured fault that has produced an earlier substantial earthquake. For example, along the San Andreas fault break in the 1966 earthquake on June 27 near Parkfield, California, offset of road pavement increased by a few centimeters in the days following the main earthquake. Such continued adjustment of the crustal rock after the initial major offset is probably caused partly by aftershocks and partly by the yielding of the weaker surface rocks and gouge in the fault zone as they accommodate to the new tectonic pressures in the region.

It is clear that slow slippage, when it occurs in built up areas, may have unfortunate economic consequences. This is another reason why certain types of structures should not be built across faults if at all possible. When such structures including dams and embankments must be laid across active faults, they should have jointed or flexible sections in the fault zone.

S8

1. Tectonic EQs.

نظریه تکتونیک صفحه‌ای همه زلزله‌ها را تفسیر نمی‌کند (Inter plates EQs)

بلکه زلزله‌ها در داخل صفحات نیز می‌توانند رخ دهند (Intra plates EQs)، وجود این زلزله‌ها بیین این موضوع است که صفحات پوسته زمین صلب نیستند و در داخل خود نیز می‌توانند فعالیت‌های تکتونیکی داشته باشند.

از سری زلزله‌های معروف درون صفحه‌ای (Intraplate EQs) می‌توان به موارد ذیل اشاره نمود:

Dashte-Bayaz EQ. August, 31, 1968

New Madrid EQ Series 1811 - 1812 (Missouri) در راستای رود می‌سی‌سی‌پی Mississippi

Carleston (Charleston), South Carolina, 1886

---

2. Explosions.

- انفجارات ناشی از مواد منفجره شیمیایی یا اتمی می‌توانند حرکات مصنوعی زمین را تولید کند.
- این حرکات تا حال تا $M=6$ هم تولید کرده است.
- این حرکات در کل زمین قابل ثبت است.

---

3. Volcanic EQs.

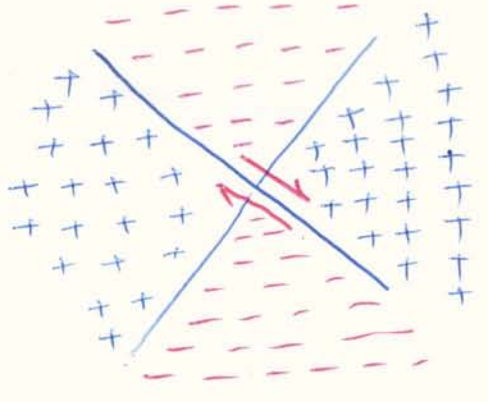
- فعالیت‌های آتش‌فشانی و زلزله‌ها معمولاً در محل‌های مشابهی در کناره پوسته‌ها اتفاق می‌افتد.
- زلزله‌هایی که ناشی از فعالیت‌های آتش‌فشانی باشند نادرند. (برخلاف تصور قدما)
- در زلزله ۱۹۶۴ آلاسکا هیچ‌گونه افزایش فعالیت آتش‌فشانی گزارش نشد.
- در زلزله ۱۹۶۰ chilean، آتش‌فشان Puyehue (in the Andes)، ۴۸ ساعت پس از زلزله آتش‌فشانی نمود.

---

4. Collapse EQs.

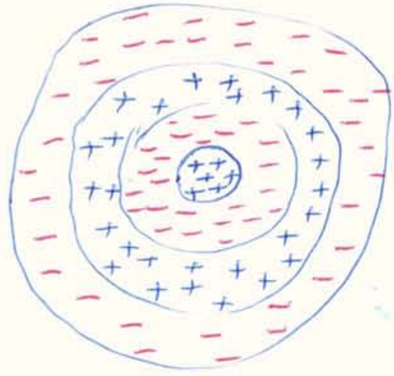
- بر اثر فروریزش غارها و معادن به وجود می‌آید.
- باعث زلزله‌های خفیف می‌شود.
- برخی اوقات زمین لغزش (landslide) هم می‌تواند باعث آن باشد.
- در 25 April, 1974 در راستای رود Mantaro در پرو، زمین لغزشی رخ داد که باعث بوجود آمدن امواج برابر =4.5 شد و ۴۵۰ نفر کشته شدند. در این زمین لغزش $1.6\times10^9\ m^3$ خاک و سنگ لغزید.

نگاشت‌های ثبت شده از زلزله‌هایی که گسل سطحی نداشته‌اند، نیز این تئوری را پشتیبانی میکند. با ثبت چنین نگاشتها در محل‌های مختلف نزدیک به کانون زلزله، ثابت شده که مناطق فشاری و کششی چهارگانه بوجود می‌آید. (برخلاف امواج انفجاری)



Shear Couple Source

+ Compression
- dialatation



Explosive Source

5. Large Reservoir-Induced EQs.

- فشار آب پشت سدها و ... می‌تواند باعث زلزله گردد.

- در دهه 1870's، سازمان U.S. Corps of Engineers به پروژه‌ای وارد شد که قرار بود کل ذخیره آب در جنوب کالیفرنیا در Salton Sea ساخته شود.

- 4% of large Dams had an EQ. reported with Magnitude more than 3.0 within 16 Kilometers of Dam

- محاسبات نشان میدهد که فشار آب در سدها به اندازه‌ای نیست که بتواند باعث لغزش گسلها شود بلکه دو نظریه وجود دارد
  - تنش ناشی از فعالیت‌های تکتونیکی به اندازه کافی وجود داشته و شکسته شده که فقط تنش به آن اعمال شود.
  - نفوذ سد و فشار آب آن باعث افزایش فشار آب در لایه‌ها سنگی شده است و باعث گردد.

*** Evidences:**

- Filling of Lake Mead behind Hoover Dam ($H = 221$ m), Nevada Arizona, 1935.

  پس از سال ۱۹۴۰ صدها زلزله اتفاق افتاده که عمق کانونی کمتر از ۸ کیلومتر داشتند.

- In Koyna, India, an earthquake ($M = 6.5$) centered close to the dam ($H = 103$ m) caused significant damage on December 11, 1967.

- شواهد نشان داده است که لرزه‌خیزی منطقه چندین برابر از فصل باران که سد پر شده است، افزایش می‌یابد.

6. Tsunami

Earthquake Intensity

برای مقایسه شدت زلزله‌های مختلف، باید معیاری برای شدت زلزله تعریف شود.

Modified Mercalli Intensity (12 درجه دارد) → به عنوان تمرین پیدا کنید.
(MMI, 1931)

مزایا:
- ساده است و نیاز به وسایل پیچیده نیست.
- توصیفی از عملکرد ساختمان‌ها در خود دارد.
- خطوط هم‌لرزه ناحیه زلزله‌زده را مشخص می‌کند.
- قابل کاربرد برای زلزله‌های تاریخی است.

معایب:
- بستگی به قضاوت شخصی دارد.
- به رفتار ابنیه بستگی دارد.
- تعیین خطوط هم‌لرزه برای شدت‌های بالا ممکن نیست زیرا ابنیه تخریب…
- شدت زلزله ارتباط مستقیم با شتاب حاصل از زلزله ن…

هر سال به صورت میانگین ۱۰،۰۰۰ نفر بر اثر زلزله کشته می‌شوند.

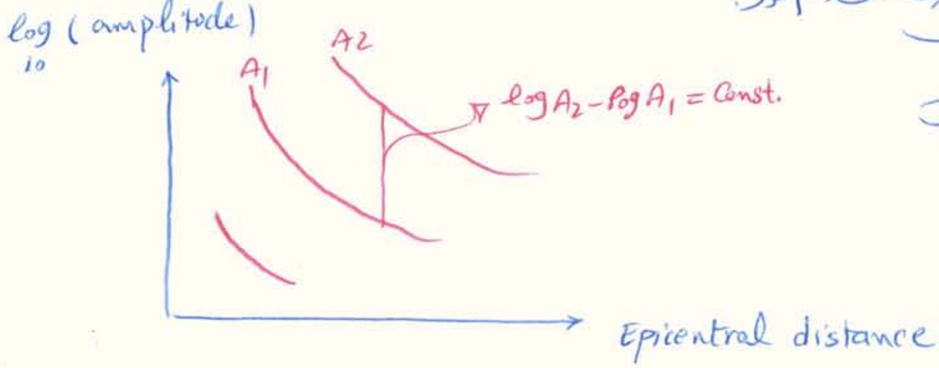
- در سال‌های بین ۱۹۲۶ الی ۱۹۵۰، ۱۰ میلیارد دلار خسارت بر اثر زلزله اتفاق افتاد. (۲ شهر و ۲۰۰ روستا ویران شدند)

Earthquake Magnitude and Energy

- بزرگای زلزله معرف بزرگی زلزله است که براساس رکوردهای ثبت شده محاسبه می‌شود.
- « « معرف میزان انرژی زلزله است و مستقل از محل ثبت رکورد می‌باشد.
- « « با شدت زلزله (EQ. Intensity که اصطلاحاً شدت است چون IM) بستگی به سه پارامتر دارد
  - میزان انرژی آزاد شده در کانون
  - فاصله از کانون تا محل ثبت
  - نوع زمین

C.F. Richter (1935) منحنی‌های زیر را برای زلزله‌های مختلف رسم نمود:

از این نتیجه شد که
- روند نزولی است
- برای زلزله‌های مختلف موازی است
- تقریب منحنی‌هاست



پس بنابر نتیجه رسیدند (چون موازی‌اند) می‌توان فرض نمود که $\log A_2 - \log A_1 =$ ثابت

این مهم این امکان را فراهم می‌آورد که پارامتر بزرگا (M)، مستقل از فاصله رومرکزی، تعریف شود. داریم:

$$M = \log A - \log A_0$$

A: حداکثر دامنه زلزله مورد نظر

A_0: حداکثر دامنه زلزله رفرنس

هر دو ثبت شده با دستگاه [illegible].

Wood - Anderson Seismograph
- 0.8 (s) Period → امواج بین 0.5 (s) تا 1.5 (s) را خوب ثبت می‌کند و برای سازه‌ها مهم‌اند.
- 2800 magnification
- %80 critical damping

Richter در سال ۱۹۳۵، معیار بزرگا را بصورت ذیل توصیف نمود:

M (بزرگا): لگاریتم (مبنای ۱۰) حداکثر دامنه زلزله (میکرون، 0.001 mm) که در فاصله ۱۰۰ کیلومتری از مرکز زلزله توسط دستگاه استاندارد Wood-Anderson ثبت می‌شود. (or M_L)

- معیار M را همچنین می‌توانیم برای رکوردهای که در فاصله 100^{km} ثبت نشده‌اند نیز محاسبه نمائیم، در صورتی که نحوه کاهنده شدن امواج زلزله را بدانیم. مثلاً برای زلزله‌های shallow در کالیفرنیای جنوبی در فاصله 200 تا 1500^{km} رابطه تجربی ذیل قابل استفاده است.

$$M = \log A + 3\log \Delta - 3.37$$

Δ: Epicentral distance (km)

A: Amplitude (microns)

- اگر رکورد توسط دستگاه دیگری ثبت شده باشد، می‌توان آن را تبدیل به دستگاه استاندارد نمود.

زلزله‌های دور

if $A \in$ Bodily waves $\Rightarrow M = M_B =$ "m" (based on teleseismic data)

if $A \in$ surface waves $\Rightarrow M = M_S =$ "M" (based on local data)

زلزله‌های نزدیک

if $A = 1$ micron $\Rightarrow M = 0$

if $A = 1^{mm}$ $\Rightarrow M = 3$

- معیار ریشتر حد بالا و پایین ندارد:

- اگر دستگاه‌ها غیر استاندارد استفاده شود امکان بوجود آمدن بزرگای منفی نیز وجود دارد. تا −3 نیز می‌رسد (عملاً کمتر نمی‌شود)

- حداکثر زلزله‌ای که تاکنون ثبت شده 9 است.

Relationship between EQ. Magnitude and Energy

و حداکثر دامنه A_0 و T_0

فرض می‌کنیم که امواج زلزله متشکل از n موج سینوسی با طول موج λ و V می‌باشند

instantaneous particle velocity

$$\text{Kinetic Energy} = \int \frac{m v^2}{2}$$

mass

جابجایی $x = A_0 \cos\frac{2\pi t}{T_0} \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi A_0}{T_0}\sin\frac{2\pi t}{T_0} = v_0 \sin\frac{2\pi t}{T_0}$

$$\& \text{ acceleration} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-4\pi^2 A_0}{T_0^2}\cos\frac{2\pi t}{T_0} = -\frac{4\pi^2 x}{T_0^2}$$

انرژی جنبشی بر حجم

ρ: دانسیته

$$= E = \frac{1}{2} r v_0^2 T_0^{-1}\int_0^{T_0} \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)dt = 0.25 r v_0^2 = 0.25 r\left(\frac{2\pi A_0}{T_0}\right)^2 = \frac{\pi^2 r A_0^2}{T_0^2}$$

حال انرژی در داخل یک کره به ضخامت $n\lambda$ (و شعاع h) که کانون زلزله مرکز آن باشد را E_r نامیده می‌شود.

$$E_r = 4\pi h^2 n.\lambda.\ E$$

$$a_0 = \frac{4\pi^2 A_0}{T_0^2} \quad , \quad \lambda = V.T_0$$ که انرژی با سرعت V سفر کند، پس

$$\text{Therefore: } E_T = \frac{h^2.n.V.P.T_0^3.a_0^2}{4\pi}$$

$$\text{length of the pulse } t_0 = nT_0$$

$$\Rightarrow E_T = \frac{h^2.V.P.t_0 T_0^2 a_0^2}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{ergs}}{\log E_T} = 2\underset{\text{cm}}{\log h} + \underset{\text{s}}{\log t_0} + 2\underset{\text{s}}{\log T_0} + 2\underset{\text{cm/s}^2}{\log a_0} + \log \frac{\overset{\text{cm/s}}{V}.\overset{\text{gm/cc}}{P}}{4\pi}$$

$$\log E_T = K_1 + K_2 M - K_3 M^2$$

رابطه تجربی (اصولاً به این سادگی نیست)

Gutenberg & Richter (1965) مقادیر ذیل را برای ضرائب پیشنهاد کردند:

$K_1 = 9.4$

$K_2 = 2.14$

$K_3 = 0.054$

همچنین:

$$\log E_T = 5.8 + 2.4 M_B$$

$$\log E_T = K_1 + 1.8 M_S \quad \text{where } K_1 = 9 \text{ to } 12$$

---

if $M = 0 \Rightarrow E \approx 10^5$ ergs

if $M = 8 \Rightarrow E \approx 10^{25}$ 〃

$\Rightarrow$ هر درجه افزایش بزرگا، انرژی را ۳۰۰ برابر میکند

$$1\ \text{erg} = 1\ \text{dyne} \times 1\ \text{cm}$$

$$1\ \text{dyne} = 1\ \text{gram} \times 1\ \text{cm}/\text{s}^2$$

5- Stress Drop & Seismic Moment

آزمایشات و تجارب زلزله‌های گذشته نشان داده که «افت تنش» در زلزله‌ها با بزرگای ثابت، یکسان نیست.

بلکه بستگی دارد به:
- ۱- سطح اولیه تنش
- ۲- پارامترهای Source

- معمولاً هرچه «افت تنش» کمتر باشد، زلزله دارای محتوای فرکانسی بالاتری است (پریود پائین‌تر)

fault Area

Seismic Moment $= M_0 = \cancel{M_w} = \mu \cdot A \cdot x_f$

average slip between the two sides of the fault

shear Coefficient

فرمول آن اینست که در تقسیم‌بندی انواع زلزله بستگی ندارد بلکه به نیروی اعمالی به سطح گسلش بستگی دارد.

$\log_{10} M_0 = 19.9 + M_s$ (Empirical)

total available strain Energy

Seismic Energy

$\bar{\sigma}$ = average shear stress on the fault $= \mu \cdot \dfrac{E_p}{M_0}$ or $\bar{\sigma}_{app} = \dfrac{\mu \cdot E}{\eta \cdot M_0}$

η: Seismic energy conversion efficiency (0.1% to 1%)

M_L or M_b =	for magn. between 3 and 7
"	5 and 7.5
M_s →	for all
M_w →	

با فرمول‌های فوق و کلیه سازه‌سازی‌های ایران ⊙ پارامترهای ذیل را می‌توان محاسبه نمود:

- Stress level (up to 10,000 bars)
- Stress drop
- fault length

$$M_w = \frac{\log M_0}{1.5} - 10.7$$

(M_0 in dyn-cm)

Magnitude and Fault Rupture length

Empirical Relationship (california & Nevada), Tocher, 1958

$$\log \underset{\text{Km}}{L} = 1.02M - 5.77$$

King & Knopoff (1968): $\log L D^{2} = 1.90M - 2.65$ (cm)

D: fault offset (cm)

M	جابجایی گسل
5.5	5-10 Km
6	10-15
6.5	15-30
7	30-60
7.5	60-100
8.0	100-200
8.5	200-300

SSF $\begin{cases} \log D = -3.09 + 0.481 M_s \\ \log L = -4.1 + 0.804 M_s \end{cases}$ امتدادلغز

RF $\log L = 1.96 + 0.497 M_s$ معکوس

NF $\log D = -7.51 + 1.109 M_s$

L: طول گسل (کیلومتر)

D: جابجایی قائم (سانتیمتر)

زلزله خیزی ایران

- ایران در قسمت میانی کمربند کوهزای آلپ - هیمالیا واقع شده است.

- صفحه عربستان در حال حرکت به زیر صفحه ایران است (ش ش)

- صفحه اقیانوسی هند نیز به زیر منطقه مکران می رود.

- گسل های ایران اغلب روند شمالی - جنوبی دارند.
  - ۱- امتداد ناحیه زاگرس ← شمال غرب - جنوب شرق
  - ۲- امتداد البرز شرقی ← شمال شرق - جنوب غرب

- ایران از شمال ← صفحه اوراسیا
  از شرق ← صفحه هند
  از غرب ← صفحه آناتولی محاصره شده است. فشار صفحه عربستان باعث فشرده و ضخیم تر شدن آن می گردد.

- امبرسز ایران را به دو ناحیه تقسیم کرده ۱- هلال ایران (Iranian Crescent): خطی که از آذربایجان شروع شده از البرز گذشته و به شمال خراسان می رسد. آنگاه به سمت جنوب رفته و از شرق کویر لوت تا شمال سیستان ادامه می یابد.
اکثر زلزله های ویرانگر مانند بوئین زهرا، فردوس، دشت بیاض، طبس و منجیل در نقاط حاشیه هلال ا

۲- عوارض نواحی زاگرس و امتداد آن به لارستان که دارای لرزه خیزی بالا ولی بزرگای کمتر است.
گواه این ادعا وجود شماره های زیاد زلزله های تاریخی در این منطقه است.

زلزله‌های مهم فلات ایران

۱۳۴۱	بوئین زهرا	۷٫۴ ریشتر (گسل آبیک در جنوب البرز)
۱۳۴۷	دشت بیاض	۷٫۴
۱۳۴۷	فردوس	۶٫۴
۱۳۵۷	طبس	۷٫۴
۱۳۵۸	قائنات	۶٫۶ و ۷٫۱
۱۳۶۹	منجیل	۷٫۴
۱۳۸۲	بم	۶٫۵
۱۳۸۳	فیروزآباد کجور	۶٫۳

یک روز فاصله داشتند

زلزله‌های مهم زاگرس

۱۲۷۸	سیلاخور	۷٫۴ ریشتر
۱۳۳۶	فارسینج	۷٫۳ ریشتر
۱۳۲۷	نهاوند	۶٫۷ ریشتر
۱۳۵۱	قیر کارزین در فارس	۷٫۱ ریشتر
۱۳۵۶	سرخون در شمال بندرعباس	۷ ریشتر
۱۳۸۴	زرند (کرمان)	۶٫۴

زلزله‌های بزرگ تهران

		محل وقوع	گسل مسبب
400 B.C.	۷٫۶	ری	ری
122 خورشیدی	۷٫۲	ری	گرمسار
234	۷٫۱	ری	ری
242	۵٫۴	کرج	شمال تهران
337	۷٫۷	ری	شاد در شمال تهران
556	۷٫۲	ری	شمال تهران
1044	۶٫۵	دماوند	شاد
1209	۷٫۱	دماوند-شمیران	شاد
1352	۵	ورامین	شاد

مقایسه با دوره بازگشت زلزله قوی ۷ ریشتر در تهران که حدود ۱۶۵ سال است

- نرخ تجمع کرنش در ایران تقریباً ثابت است و بین 10^{10} تا 3×10^{10} $\sqrt{\frac{\text{ارگ}}{\text{سال}}}$ می‌باشد.

- امبرسیز برای ناحیه زاگرس نرخ لغزش صفحات زمین را 0.4 $\frac{mm}{year}$ تخمین زده است.

البرز ۱/۷

شرق ایران ۱/۴

- امبرسیز برای زلزله‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۷۹ ←

$$\log N = 6.88 - 0.86M$$

- امبرسیز ←

$$M = 1.1 + 0.4\log(L^{1.58} R^2)$$

طول گسل (cm)

جابجایی گسل (cm) $\approx 10^{-5} \times$ طول گسل

$$\Rightarrow \log L = 0.7M - 3.24$$

e.g. البرز $\longrightarrow L = 200 \Rightarrow M = 7.9$

شرق ایران $\longrightarrow L = 150 \Rightarrow M = 7.7$

زاگرس $\longrightarrow L = 50 \Rightarrow M = 7.1$

شبکه‌های لرزه‌نگاری و شتاب‌نگاری ایران :

قدیمی‌ترین شبکه لرزه‌نگار - ۱۳۴۸ - موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران با همکاری دانشگاه مشهد و شیراز

دارای ۷ پایگاه (تهران - کرمان - تبریز - شیراز - کرمانشاه - مشهد - سفیدرود)
بجز پایگاه تهران، بقیه پایگاه‌ها دارای دستگاه Wood-Anderson می‌باشند.

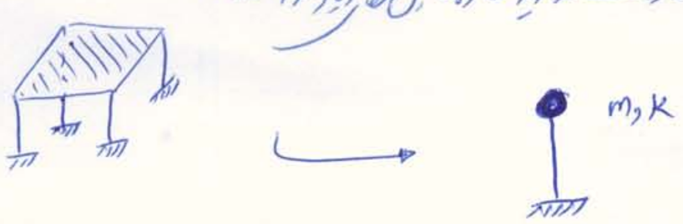
قدیمی‌ترین شبکه شتاب‌نگار - ۱۳۵۲ - مرکز تحقیقات ساختمان و مسکن - از دستگاه SMA-1 استفاده می‌کند.

پژوهشگاه بین‌المللی زلزله ← درحال تکمیل شبکه لرزه‌نگاری و شتاب‌نگاری

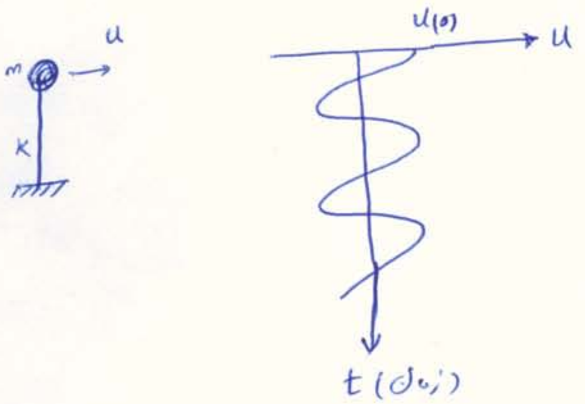
سازمان انرژی اتمی ← شبکه شتاب‌نگاری دارد.

- معادلات حرکت

- یک ساختمان یک طبقه را که ساده‌ترین حالت می‌توان به صورت یک پاندول وارونه مدل‌سازی نمود:
- چون اغلب جرم ساختمان در سقف متمرکز است، می‌توان انتظار داشت که این ساده‌سازی خطای زیادی نداشته باشد.
- منبع جرم آب یک پاندول کلاسیک دیگر است.



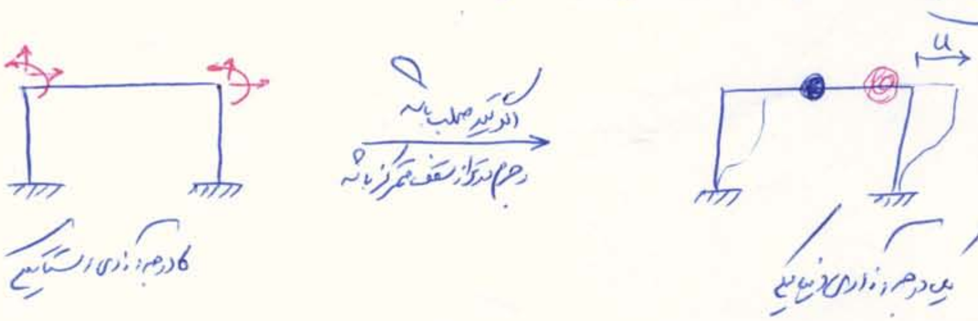
- اگر این پاندول وارونه را حرکت تغییر مکان اولیه $u(0)$ قرار دهیم خواهیم داشت:



ولی در عمل انرژی پس از چند سیکل میرا می‌شود و سازه می‌ایستد. بنابراین: «پدیده کاهش تدریجی دامنه ارتعاش را میرایی می‌نامند»

* تعداد مولفه‌های مستقل تغییر مکانی لازم برای تعریف وضعیت تغییر مکانی تمام جرم‌ها نسبت به وضعیت اولیه‌شان، تعداد درجات آزادی (DOF) دینامیکی نامیده می‌شود.

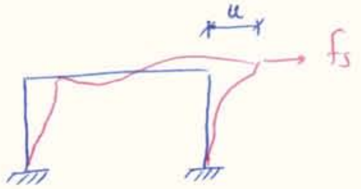
تعداد درجات آزادی دینامیکی معمولاً از تعداد درجات آزادی استاتیکی سازه کمتر است.

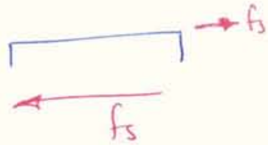


بارهای دینامیکی هم بر دو نوع‌اند:

۱. بار دینامیکی تابع زمان $P(t)$

۲. حرکت زمین $\ddot{u}_g(t)$



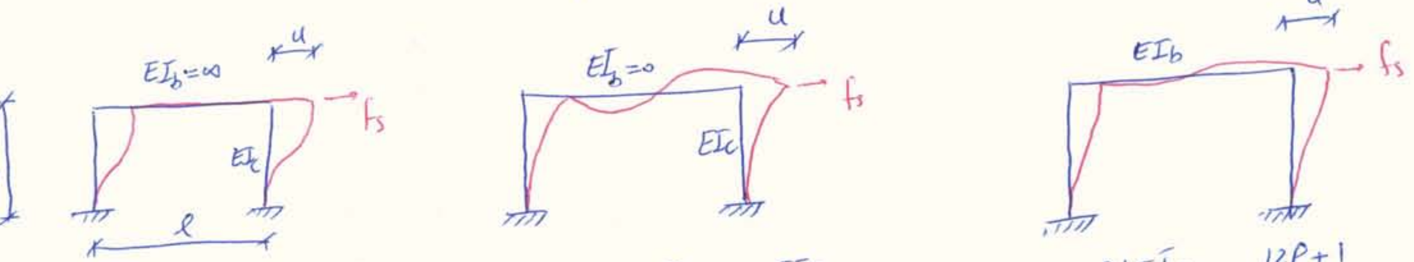


حال اگر همان قاب تحت نیروی f_s قرار گیرد:

در سیستم الاستیک خطی:

$$f_s = ku$$

صلبیت (سختی) جانبی قاب: نیروی لازم برای ایجاد تغییر مکان u برابر واحد.

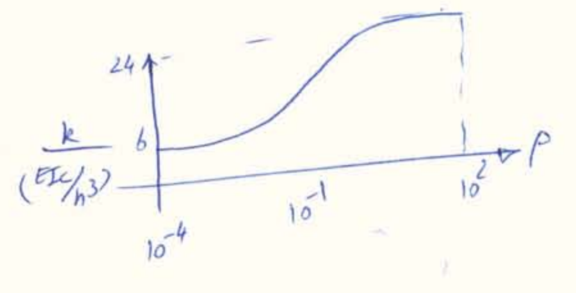


$$k = \sum \frac{12EI_c}{h^3} = 24\frac{EI_c}{h^3}$$

$$k = \sum \frac{3EI_c}{h^3} = 6\frac{EI_c}{h^3}$$

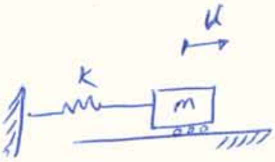
$$k = \frac{24EI_c}{h^3} \times \frac{12\rho+1}{12\rho+4}, \quad \rho = \frac{I_b}{4I_c}$$

که از تغییر شکل‌های محوری صرف‌نظر کرده

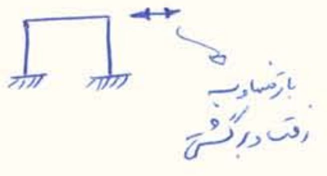


با تغییرات ρ از صفر تا بی‌نهایت، صلبیت جانبی ۴ برابر می‌شود.

سیستم فوق به صورت ذیل هم می‌توان مدل نمود:



سیستم‌های غیرالاستیک :



برای بدست آوردن نمودار فوق:
- روش عددی (تحلیل غیرخطی)
- روش تجربی (آزمایشگاهی)

میرایی :

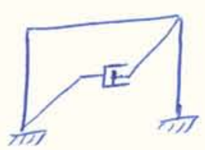
Prof. Wilson:

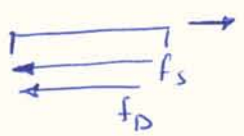
Linear viscous damping is a property of the computational model and is not a property of a real structure.

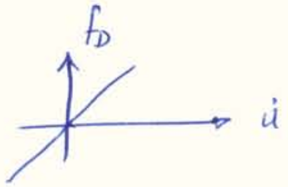
علت این امر، وجود اصطکاک داخلی، پدیده‌های حرارتی ناشی از تغییرشکل‌های الاستیک تکراری مصالح است.

- باز و بسته شدن ترک‌های میکروسکوپی (در بتن)
- اصطکاک بین عناصر سازه‌ای و غیرسازه‌ای (دیوار و قاب)

اغلب این میرایی توسط یک میراگر خطی لزجی (ویسکوز) با یک فنر مدل می‌شود.





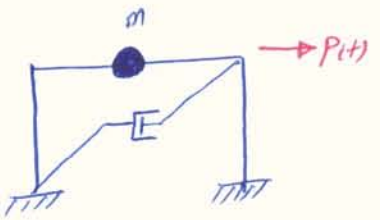


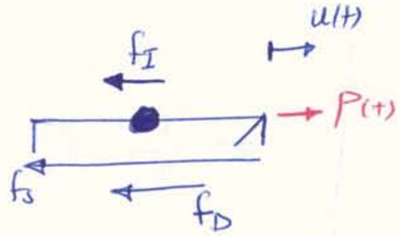
فرض می‌شود که

$$f_D = c\dot{u}$$

که c ضریب میرایی لزجی

$$\frac{\text{نیرو} \times \text{زمان}}{\text{طول}}$$





معادله حرکت دینامیکی :

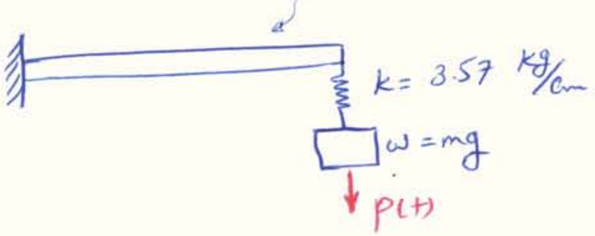
معادله تعادل دینامیکی

معادله 8 بر اساس نیروهای اینرسی تعادل بین نیروهای داخلی تعریف می‌گردد.

$$f_I + f_D + f_s = P(t) \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) & \text{سیستم خطی} \\ m\ddot{u} + c\dot{u} + f_s(u, \dot{u}) = P(t) & \text{سیستم غیرخطی} \end{cases}$$

* فصل 1.2 کتاب مطالعه شود. *

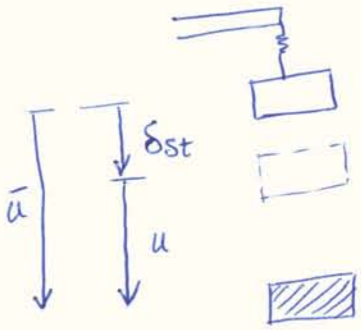
میله فولادی با قطر 10 میلیمتر



فصل 1.3 کتاب

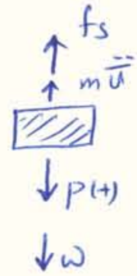
– از جرم تیر و فنر صرف‌نظر کنید

– $E_{فولاد} = 2\times10^{6}\ kg/cm^2$



— وضعیت تغییر شکل نیافته

— " تعادل استاتیکی



$$\text{تعادل دینامیکی} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m\ddot{\bar{u}} + f_s = \omega + P(t) \\ f_s = k_e\bar{u} \\ \bar{u} = \delta_{st} + u \\ \ddot{\bar{u}} = \ddot{u} \\ k_e\delta_{st} = \omega \end{array}\right\} \Rightarrow m\ddot{u} + k_e u = P(t)$$

معمولاً رابطه‌سازی تعادل دینامیکی سازه‌ها نسبت به وضعیت تعادل استاتیکی صورت می‌پذیرد. (تحت تاثیر وزن قرار ندارد)

γ

$$f_s = k_e \bar{u}$$

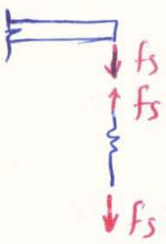
$$\bar{u} = \delta_{spring} + \delta_{beam}$$

$$f_s = k\,\delta_{spring} = k_{beam}\,\delta_{beam}$$

$$\Rightarrow \frac{f_s}{k_e} = \frac{f_s}{k} + \frac{f_s}{k_{beam}} \Rightarrow k_e = \frac{k\,k_{beam}}{k + k_{beam}}$$

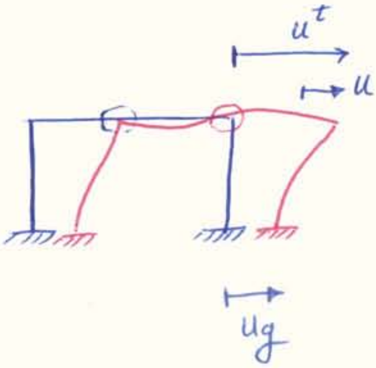
حال به محاسبه سختی تیر می‌پردازیم

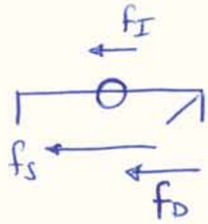
$$k_{beam} = \frac{3EI}{L^3} \Rightarrow$$



$$k_e = \frac{3.57 \times 6.82}{3.57 + 6.82} = 2.34 \ \mathrm{kg/cm}$$

معادله حرکت
به‌ازای تحریک زلزله (حرکت زمین)





$$u^t(t) = u(t) + u_g(t)$$

تعادل دینامیکی $\Rightarrow f_I + f_D + f_S = 0$

$$f_I = m\ddot{u}^t$$

f_D و f_S توسط u تولید می‌شوند

$$\Rightarrow m\ddot{u}^t + c\dot{u} + ku = 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)}$$

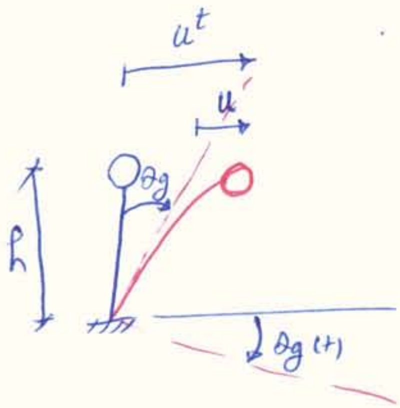
$$\ddot{u}^t = (\ddot{u} + \ddot{u}_g)$$

معادله حاکم بر حرکت

مشابه سیستم با پایه ثابت و تحت نیروی خارجی $p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$ می‌باشد.

پس این نیرو متناسب با جرم سازه می‌باشد و با افزایش جرم، افزایش می‌یابد.

حرکت زمین دارای ۶ مؤلفه است:
- ۳ مؤلفه انتقالی
- ۳ مؤلفه دورانی



به عنوان حالت تحریک دورانی زمین در نظر بگیرید:

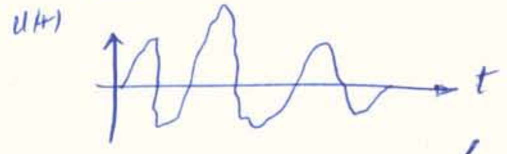
$$u^t(t) = u(t) + h\theta_g(t) \Rightarrow m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -mh\ddot{\theta}_g(t)$$

$$\Rightarrow P_{eff}(t) = -mh\ddot{\theta}_g(t)$$

مثال 1.4 مطالعه شود.

مسأله اصلی در دینامیک حل معادله دیفرانسیل حرکت است.

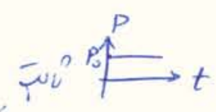
توجه بشود که پس از حل معادله دیفرانسیل حرکت دینامیکی، $u(t)$ بدست خواهد آمد که اصطلاحاً به آن تاریخچه زمانی پاسخ تغییر مکان سازه گویند.



با داشتن $u(t)$ می‌توان کلیه پاسخ‌ها از نظر نیرو، تنش و ... را برحسب زمان حساب کرد.

سیستم
- خطی ← می‌توان اثر دو نیرو در سیستم را جمع نمود (جمع آثار قوا)
- غیرخطی ← نمی‌توان " " " . بلکه آثار استاتیکی را با در نظر گرفتن شرایط اولیه در تحلیل دینامیکی منظور

سیستم
- خطی
  - حل بسته (closed Form Solution)
  - انتگرال دیوهامل
- غیرخطی ← قطعه قطعه کردن گام به گام زمانی



$m\ddot{u} + ku = P_0$ که

مثال 1.5

$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$

$u_c(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t \quad , \quad \omega_n = \sqrt{k/m}$

$u_p(t) = P_0/k$

$$\text{if} \quad \begin{matrix} u(0) = 0 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{matrix} \Rightarrow A = -P_0/k \;, B = 0 \Rightarrow u(t) = \frac{P_0}{k}(1 - \cos\omega_n t)$$

$u = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad , \quad m\ddot{u} + ku = 0$

$\dot{u} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$

$\ddot{u} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$

$-mA\omega^2\cos\omega t - mB\omega^2\sin\omega t + kA\cos\omega t + kB\sin\omega t = 0$

$\Rightarrow (k - m\omega^2)\underbrace{(A\cos\omega t + B\sin\omega t)}_{u \neq 0} = 0 \Rightarrow k - m\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{k/m}$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{k/m}}$$

مسائل برای حل از فصل اول جزوه

۱-۱ تا ۱-۳

۱-۶

۱-۱۲

ارتعاش آزاد

معادله دینامیکی $\Rightarrow m\ddot{u} + ku = 0$

* ارتعاش آزاد در SDOF نامیرا

* شرایط مرزی

$u(0)$

$\dot{u}(0)$

حل:

$$u = e^{st} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} (ms^2 + k)\underbrace{e^{st}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow ms^2 + k = 0 \Rightarrow s = \pm i\omega_n$$

$$= \pm i\sqrt{k/m} = \omega_n$$

رابطه اویلر $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

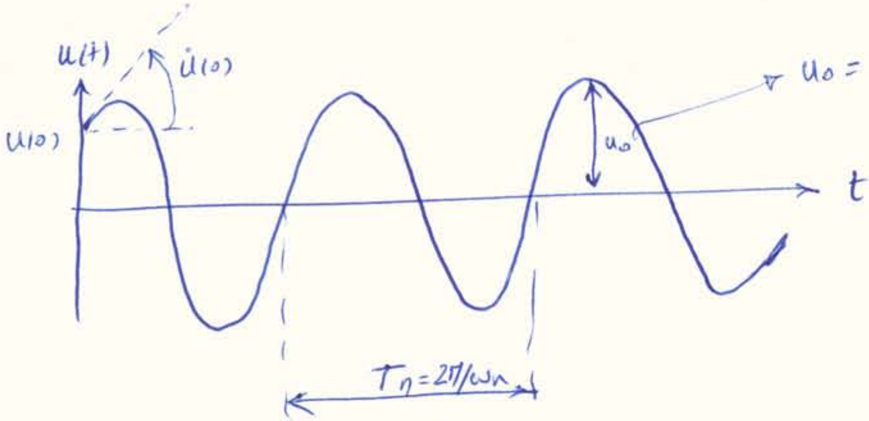
$$\Rightarrow u(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t}$$

$$\Rightarrow u(t) = \underbrace{(A_1 + A_2)}_{A} \cos\omega_n t + \underbrace{(A_1 - A_2) i}_{B} \sin\omega_n t = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t$$

$$\dot{u}(t) = -\omega_n A \sin\omega_n t + \omega_n B \cos\omega_n t$$

اعمال شرایط مرزی $\Rightarrow A = u(0)\ ,\ B = \dfrac{\dot{u}(0)}{\omega_n}$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = u(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t}$$



$$u_0 = \left[u(0)^2 + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}$$

تناوب

$$u(t_1) = u(t_1 + 2\pi/\omega_n)$$

$$\dot{u}(t_1) = \dot{u}(t_1 + 2\pi/\omega_n)$$

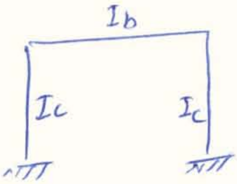
هرچه سازه سخت‌تر باشد، پریود آن کمتر است.
یا جرم کمتری داشته باشد.

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mg}{gk}} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}$$

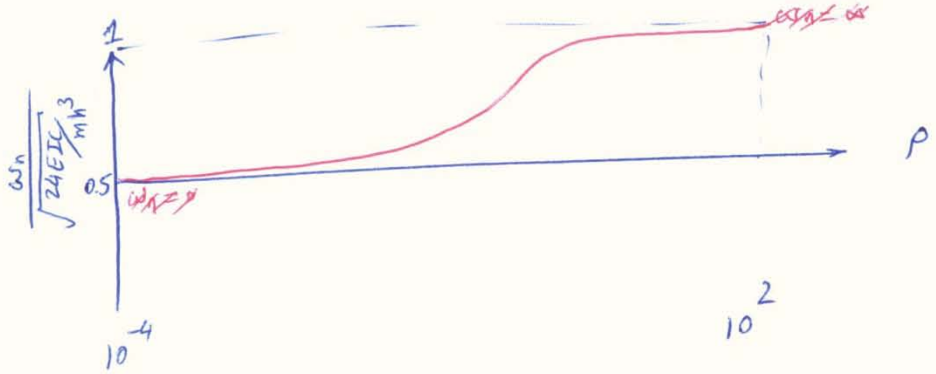
δ_{st}

→ تغییر مکان استاتیکی جرم m
که از فرمول سختی k ، دارا است .

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$k = \frac{24EI_c}{h^3} \times \frac{12\rho + 1}{12\rho + 4} \quad , \quad \rho = \frac{I_b}{4I_c}$$



$$(\omega_n)_{\rho=\infty} = \sqrt{\frac{24EI_c}{mh^3}}$$

$$(\omega_n)_{\rho=0} = \sqrt{\frac{6EI_c}{mh^3}}$$

مثال ۲-۱
۲-۲
۲-۳
مطالعه شود .

11

ارتعاش آزاد میرا

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

تقسیم بر m $\Rightarrow \ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0 \Rightarrow \ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$

$\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n$, $\frac{k}{m} = \omega_n^2$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_{cr}}$$

$$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega_n}$$

حل:

$$u = e^{st} \Rightarrow \dots \quad s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$\Rightarrow s = \omega_n(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})$$

$$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

اویلر $\Rightarrow u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t)$

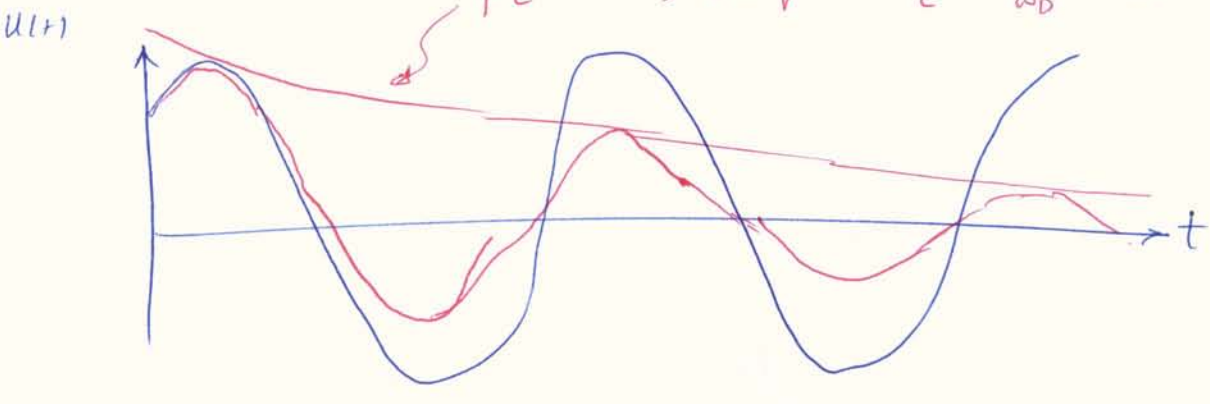
شرایط اولیه $\Rightarrow A = u(0)$, $B = \frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D}$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u(0)\cos\omega_D t + \left(\frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D}\right)\sin\omega_D t\right]}$$

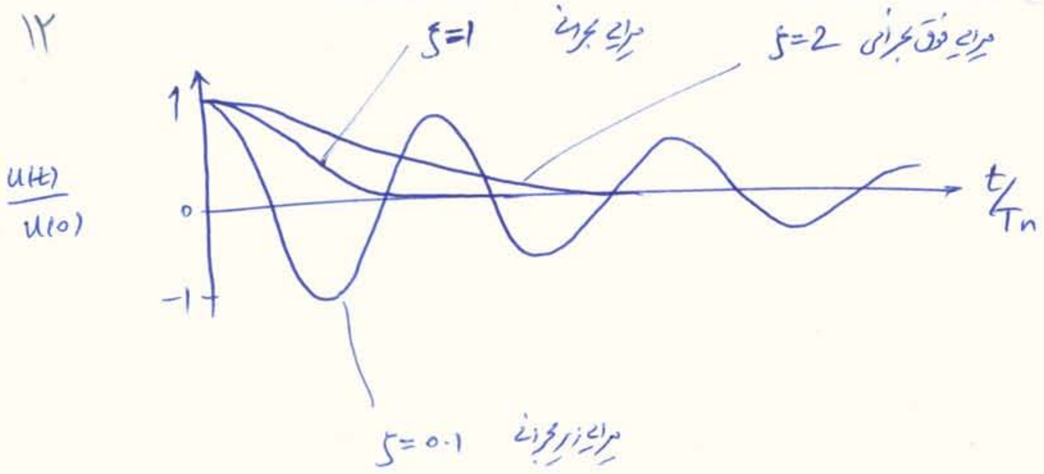
* اگر $\zeta = 0$ قرار داده شود به رابطه ارتعاش آزاد میرسیم (حالت خاص)

* هرچقدر ζ بیشتر، سازه زودتر کاهنده می‌شود

$\rho e^{-\zeta\omega_n t}$, $\rho = \sqrt{u(0)^2 + \left[\frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D}\right]^2}$



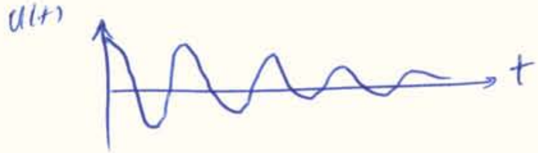
$$T_D = \frac{T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$



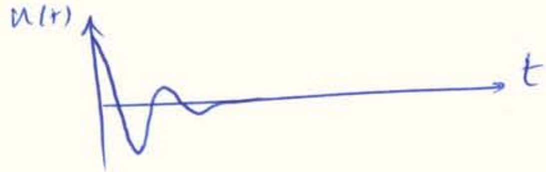
هر چقدر ξ بیشتر باشد (مقایسه $\xi=1$ و $\xi=2$) زمان بیشتری طول می‌کشد تا از $u(0)$ به صفر برسد.

مقایسه  در محیط روغن و عسل ! (ارتعاش صورت نمی‌پذیرد)

معمولاً ξ برای سازه‌های متعارف بین ۰ تا ۲۰ درصد است که در این صورت T_n و T_D به هم نزدیک‌اند.



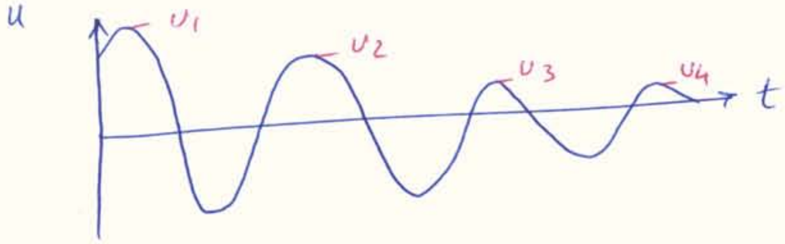
for $\xi = 0.05$



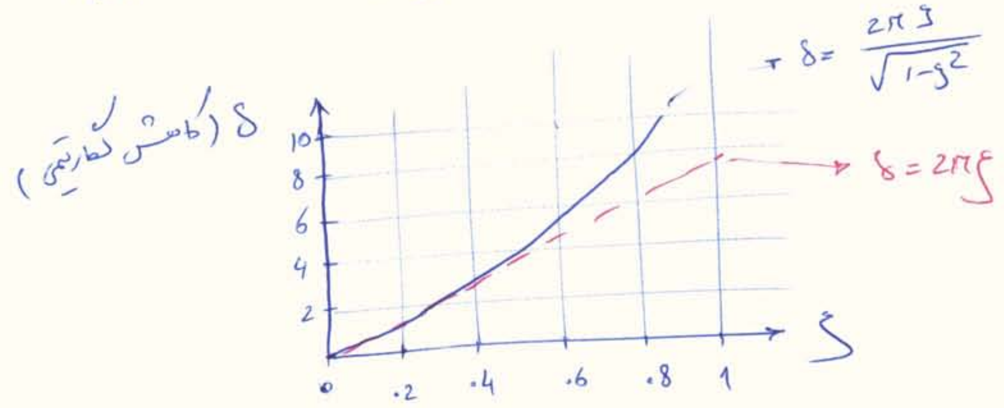
for $\xi = 0.20$

جالب است که نسبت تغییرمکان در زمان t به تغییرمکان در زمان $t+T_D$ (یک دوره ارتعاش کامل) مستقل از زمان t می‌باشد.

$$\frac{u(t)}{u(t+T_D)} = \cdots = e^{\zeta\omega_n T_D} = \exp\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$



$$\Rightarrow \frac{u_i}{u_{i+1}} = \exp\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \Rightarrow \delta = \ln\frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$



برای میرایی‌های کم $\sqrt{1-\zeta^2}\approx 1$ است.

اگر میرایی خیلی کم باشد (آلومینیم) بهتر است به‌جای اندازه‌گیری دو دامنه متوالی، چند دامنه در نظر گرفته شود.

$$\frac{u_1}{u_{j+1}} = \underbrace{\frac{u_1}{u_2}}_{e^\delta} \times \underbrace{\frac{u_2}{u_3}}_{e^\delta} \times \underbrace{\frac{u_3}{u_4}}_{e^\delta} \times \cdots \times \underbrace{\frac{u_j}{u_{j+1}}}_{e^\delta} = e^{j\delta} \Rightarrow \delta = \frac{1}{j}\ln\frac{u_1}{u_{j+1}}$$

$$\delta = 2\pi\zeta \Rightarrow$$

$$2\pi\zeta = \frac{1}{j}\ln\frac{u_1}{u_{j+1}}$$

آزمایش ارتعاش آزاد

محاسبه ζ برای سازه‌های واقعی امکان‌پذیر است.

$$\zeta = \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{u_i}{u_{i+j}} \quad \text{یا} \quad \zeta = \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{\ddot{u}_i}{\ddot{u}_{i+j}}$$

برای سازه‌ها با میرایی کم قابل استفاده است

بهتر است چون اندازه‌گیری شتاب آسان‌تر است.

مثال ۲-۱

۲-۲

را حل کنید.

پاسخ سازه به تحریک هارمونیک

* مثل نیروی ناشی از دوران نامتقارن ماشین‌ها دوره‌ای *

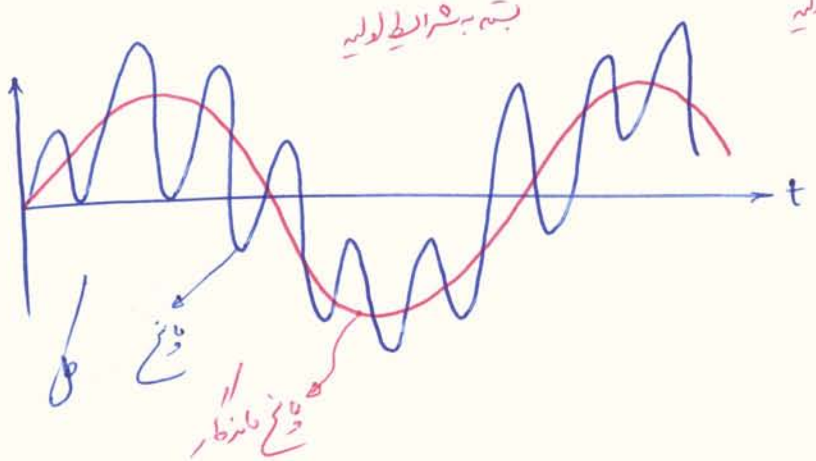
$$m\ddot{u} + ku = P_0 \sin\omega t \quad , \quad \overbrace{u = u(0) \; , \; \dot{u} = \dot{u}(0)}^{\text{شرایط اولیه}}$$

$$u = u_c(t) + u_p(t) \rightarrow C\sin\omega t = \frac{P_0}{k}\,\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\sin\omega t \quad , \quad \omega \neq \omega_n$$

$$u_c(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t$$

شرایط اولیه ⇒

$$u(t) = \underbrace{u(0)\cos\omega_n t + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{P_0}{k}\,\frac{\omega/\omega_n}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]\sin\omega_n t}_{\text{حالت گذرا، بسته به شرایط اولیه}} + \underbrace{\overbrace{\frac{P_0}{k}}^{(u_{st})_0}\,\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\sin\omega t}_{\text{حالت ماندگار، به علت نیروی وارده و مستقل از شرایط اولیه}}$$



* نکته: اگر $u(0)=0$ ، $\dot{u}(0)=0$ نیز ارتعاش گذرا وجود خواهد داشت.

* در عمل میرایی باعث می‌گردد که ارتعاش گذرا بعد از چند سیکل از بین برود. پس مهمترین قسمت پاسخ همان پاسخ ماندگار است.

$$u(t) = \frac{P_0}{k}\,\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\sin\omega t = (u_{st})_0\,\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\sin\omega t$$

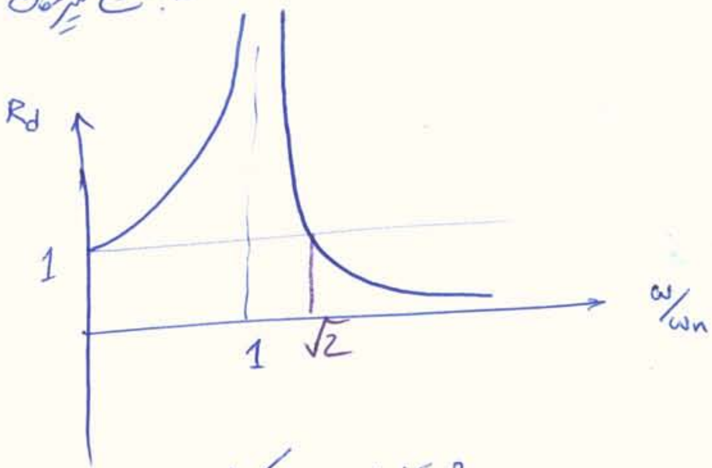
if $\omega < \omega_n \Rightarrow \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} > 0 \Rightarrow$ $P(t)$ و $u(t)$ هم‌جهت‌اند $\Rightarrow$ اگر نیرو به سمت راست باشد، تغییر مکان نیز به سمت راست است.

if $\omega > \omega_n \Rightarrow$ " $< 0 \Rightarrow$ مخالف جهت‌اند " $\Rightarrow$ راست ، چپ . . .

$$u(t) = \frac{P_0}{k}\,\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\sin\omega t = (u_{st})_0\, R_d \sin(\omega t - \phi)$$

$$\text{where}\quad R_d = \frac{1}{\left|1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|}\ ,\quad \phi = \begin{cases} 0^\circ & \omega < \omega_n \\ 180^\circ & \omega > \omega_n \end{cases}$$

$\frac{u_0}{(u_{st})_0}$ = نسبت حداکثر دامنه دینامیکی به استاتیکی = که ضریب بزرگنمایی تغییر مکان



کوچک
که

if $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \Rightarrow R_d \approx 1 \Rightarrow$ ارتعاش با تغییر مکان استاتیکی تفاوت زیادی ندارد.

if $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2} \Rightarrow R_d < 1 \Rightarrow$ دامنه تغییر شکل دینامیکی کمتر از استاتیکی است.

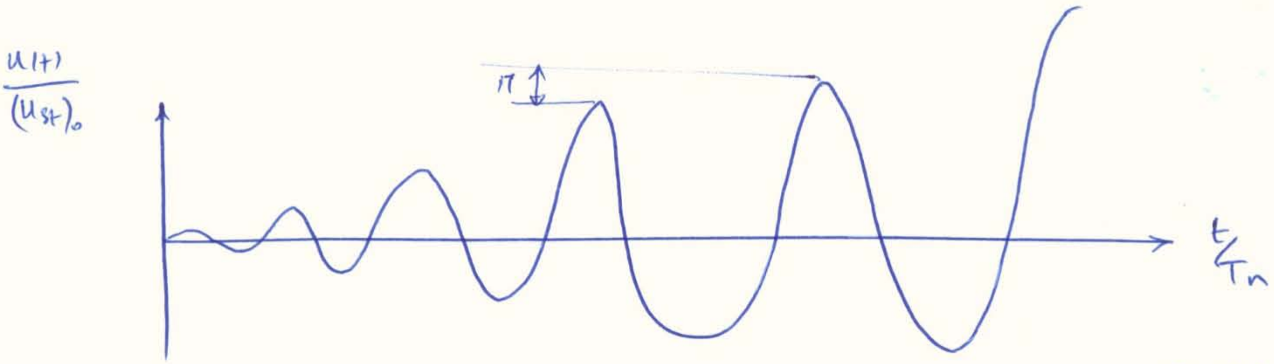
if $\frac{\omega}{\omega_n} \to \infty \Rightarrow$ دامنه نوسان بسیار کوچک است (برای ارتعاش با سرعتهای بالا زیاد)

if $\frac{\omega}{\omega_n} \to 1 \Rightarrow R_d$ زیاد است.

پدیده تشدید:

if $\omega=\omega_n \Rightarrow$ حل قبلی معادله دیفرانسیل صادق نیست چون حل خصوصی جزیی از حل عمومی است.

$$u_p(t)=\frac{-P_0}{2k}\,\omega_n t\cos\omega_n t \quad \& \quad \text{if} \quad \begin{matrix} u(0)=0 \\ \dot{u}(0)=0 \end{matrix} \Rightarrow u(t)=\frac{-1}{2}\underbrace{\frac{P_0}{K}}_{(u_{st})_0}(\omega_n t\cos\omega_n t-\sin\omega_n t)$$



این سیستم پریودی کاملاً تناوبی است.

در عمل با افزایش دامنه

اگر سیستم ترد باشد ← ترک می‌خورد

اگر سیستم نرم باشد ← جاری می‌شود

$\omega \neq \omega_n$ ⇐ آزاد می‌شود ←

ارتعاشات هارمونیک با میرایی لزج

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku = P_0 \sin\omega t \quad , \; u=u(0) \; , \; \dot{u}=\dot{u}(0)$$

$$u = u_p(t) + u_c(t) \rightsquigarrow e^{-\xi\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t)$$

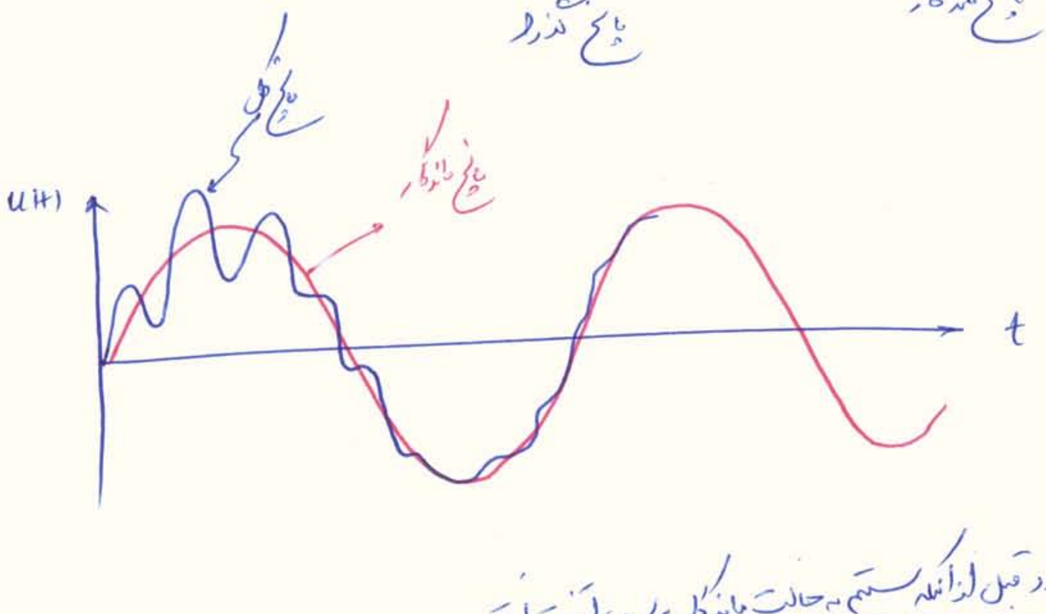
از e^{st} شروع شده تا به اینجا رسیدیم.

$$u_p(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t$$

$$C = \frac{P_0}{K}\,\frac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}$$

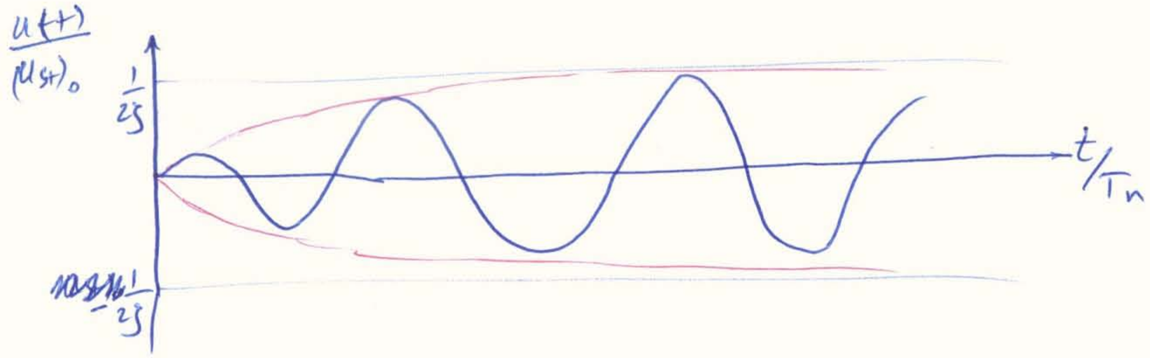
$$D = \frac{P_0}{K}\,\frac{-2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t)}_{\text{پاسخ گذرا}} + \underbrace{C\sin\omega t + D\cos\omega t}_{\text{پاسخ ماندگار}}$$



* پاسخ حداکثر امکان دارد قبل از آنکه سیستم به حالت ماندگار برسد، اتفاق افتد.

$$\text{if } \omega=\omega_n \xrightarrow[\text{احتیاجی به تغییر حل عمومی نباشد}]{D,\,C,\,B,\,A \text{ بدست آید}} u(t)=(u_{st})_o\,\frac{1}{2\zeta}\left[e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_D t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D t\right)-\cos\omega_n t\right]$$



میرایی باعث می‌شود که حداکثر دامنه به مقدار ذیل محدود شود :

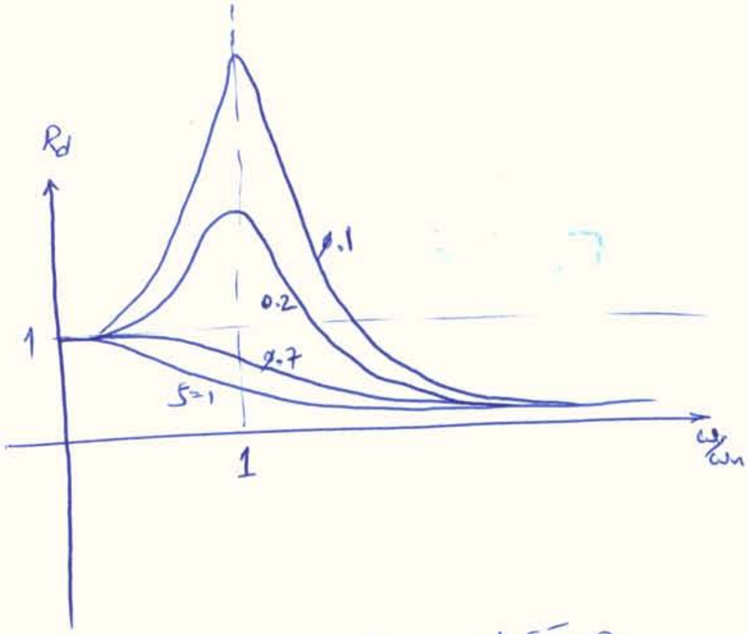
$$u_o=\frac{(u_{st})_o}{2\zeta}$$

$$\text{if } \zeta=0.05 \Rightarrow u_o=10\,(u_{st})_o$$

$$u(t) = \frac{P_0}{K} R_d \sin(\omega t - \phi) \quad , \quad \phi = tg^{-1}\left(\frac{-c\omega}{c}\right)$$

حال شکل فرکانس پاسخ تغییر شکل را می‌نویسیم.

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}$$



if $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \Rightarrow$ حالتی که تغییرات نیرو آرام است $\Rightarrow R_d \approx 1.0$ و R_d مستقل از میرایی است

به عبارت دیگر پاسخ دینامیکی تقریباً برابر پاسخ استاتیکی است و توسط سختی سیستم کنترل می‌شود.

if $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \Rightarrow$ حالتی که تغییرات نیرو سریع است $\Rightarrow R_d \longrightarrow 0$ و R_d مستقل از میرایی است

$$\frac{u_0}{(u_{st})_0} \simeq \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{\cancel{P_0}^{\,K}}{m\omega^2}$$

if $\frac{\omega}{\omega_n} \approx 1 \Rightarrow$ تغییر شکل دینامیکی می‌تواند چندین برابر استاتیکی شود $\Rightarrow \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{2\zeta}$

پاسخ توسط میرایی کنترل می‌شود.

1

$$\frac{u(t)}{P_0/k} = R_d \sin(\omega t - \phi) \xrightarrow{\text{مشتق}} \cancel{\frac{\dot{u}(t)}{P_0/\sqrt{km}} = R_v \cos(\omega t - \phi)}$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{P_0/k} = R_d\, \omega \cos(\omega t - \phi) \times \frac{\omega_n}{\omega_n} \Rightarrow \frac{\dot{u}(t)}{\frac{P_0}{k}\omega_n} = \underbrace{\frac{\omega}{\omega_n} R_d}_{R_v} \cos(\omega t - \phi)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{u}(t)}{P_0/\sqrt{km}} = R_v \cos(\omega t - \phi)$$

R_v: ضریب بزرگنمایی سرعت

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{\ddot{u}(t)}{P_0/m} = -R_a \sin(\omega t - \phi) \quad , \quad R_a = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_d$$

R_a: ضریب بزرگنمایی شتاب

$$\Rightarrow \boxed{\frac{R_a}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} = R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d}$$

در حالت تشدید

$$R_d = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$R_v = \frac{1}{2\xi}$$

$$R_a = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

for $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{dR_d}{d\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} = 0 \Rightarrow \text{فرکانس تشدید تغییر مکان} = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$$

$$\text{''} \Rightarrow \text{فرکانس تشدید سرعت} = \omega_n$$

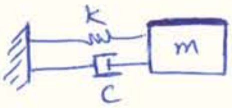
$$\text{''} \Rightarrow \text{فرکانس تشدید شتاب} = \omega_n/\sqrt{1-2\xi^2}$$

* یادآوری: در سیستم‌های نامیرا هر سه فرکانس فوق همان ω_n بودند.

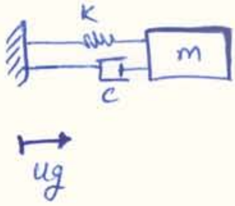
* نکته: برای سیستم میرا، فرکانس تشدید برابر $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ نیست! ولی برای سیستم‌های معمول ($\xi < 0.2$) اختلاف بین فرکانس‌های تشدید و فرکانس طبیعی سازه میرا ناچیز است.

Force Transmission and Vibration Isolation:

انتقال نیرو و جداسازی ارتعاش



$\longrightarrow P(t) = P_0 \sin \omega t$

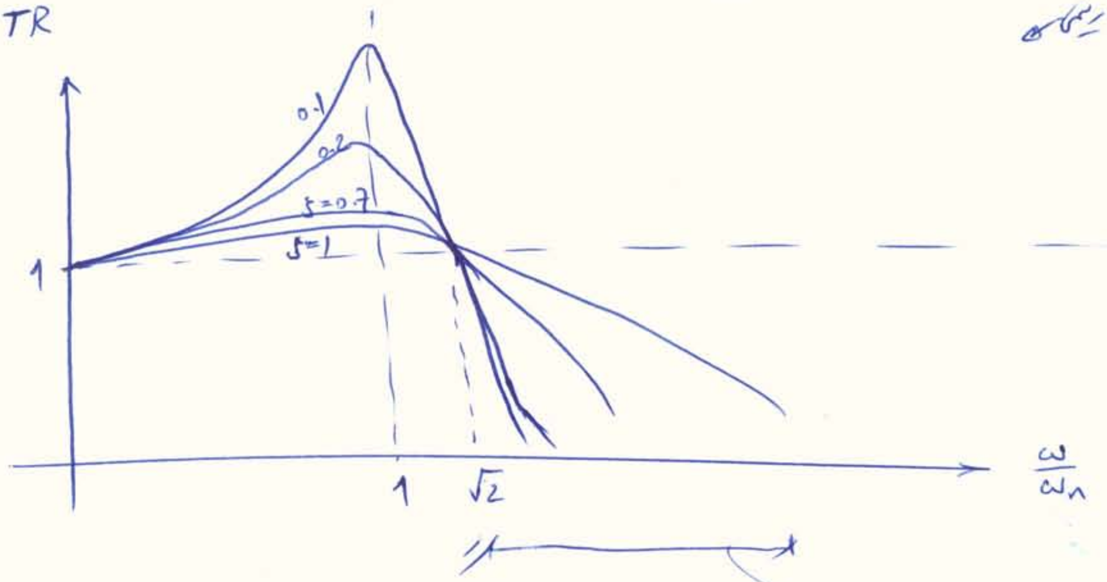


$$\left.\begin{aligned} &\text{نیروی انتقالی به تکیه‌گاه} = f_T = f_S + f_D = k u(t) + c\dot{u}(t) \\ &u(t) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \phi) \\ &\frac{\dot{u}(t)}{P_0/\sqrt{km}} = R_v \cos(\omega t - \phi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_T = (u_{st})_0 R_d \left[k \sin(\omega t - \phi) + c\omega \cos(\omega t - \phi) \right]$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &(f_T)_0 = (u_{st})_0 R_d \sqrt{k^2 + c^2\omega^2} \\ &(u_{st})_0 = \frac{P_0}{k} \\ &\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\frac{(f_T)_0}{P_0} = R_d \sqrt{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \\ &R_d = \cdots \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$TR = \frac{(f_T)_0}{P_0} = \left\{ \frac{1 + \left[2\zeta\, \omega/\omega_n\right]^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2} \right\}^{1/2}$$

در مقابل دوران تیمسه



if $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2} \Rightarrow$ نیروی انتقال یافته را کاهش می‌دهد.

در این ناحیه هرچه میرایی بیشتر باشد، بدتر است !

* اگر یک ماشین دوار داشته باشیم، فرکانس آن از لحظه شروع تا رسیدن به سرعت مطلوب افزایش می‌یابد. آنگاه اگر سیستم طوری طراحی گردد که ω_n کم باشد پس $\frac{\omega}{\omega_n}$ زیاد است $\Leftarrow$ میرایی انتهایی باعث کاهش نیروی انتقالی قبل از ناحیه شده می‌گردد

چون دوست داریم $\sqrt{2} < \frac{\omega}{\omega_n}$ باشد.

که m باید بزرگ باشد که باعث افزایش نیروی انتقال یافته در وضعیت بهره‌برداری می‌گردد.

پاسخ به حرکت زمین در حالت هارمونیک:

$$P_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{-m\ddot{u}_{g0}}{k} R_d \sin(\omega t - \phi) \qquad (2)$$

$$, \ddot{u}^t(t) = \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t) \qquad (3)$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه (۱) و نوشتن در رابطه (۲)}} \ddot{u}^t(t) = \cdots \Rightarrow \ddot{u}_0^t = \cdots$$

$$\Rightarrow TR = \frac{\ddot{u}_0^t}{\ddot{u}_{g0}} = \left\{ \frac{1 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} \right\}^{1/2} \longrightarrow$$

قابلیت انتقال برای تحریک زمین (شتاب) مشابه مسأله نیرو است.

$$\text{if } \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \Rightarrow \ddot{u}_0^t \simeq \ddot{u}_{g0} \Rightarrow$$

جرم بصورت صلب با زمین حرکت می‌کند

دستگاه بسیار سخت است.

$$\text{if } \frac{\omega}{\omega_n} \text{ خیلی زیاد } \Rightarrow \ddot{u}_0^t \cong 0 \Rightarrow$$

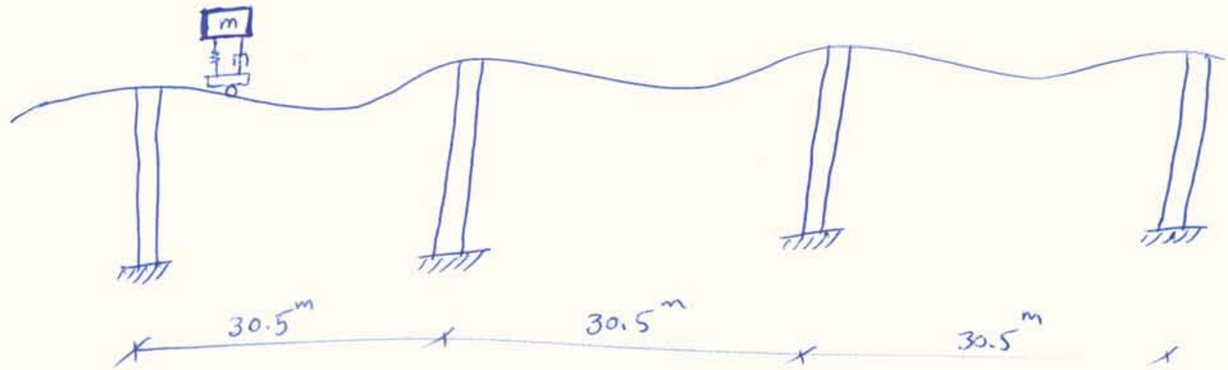
در حالی که زمین در حال لرزش است جرم ساکن می‌باشد. ⇒ مفهوم جداسازی لرزه‌ای

مثال ۳-۳ مطالعه گردد.

نکته: اگر حرکت زمین بصورت سینوسی باشد، $u_g(t) = u_{g0} \sin\omega t$ می‌توان اثبات نمود که:

$$TR = \frac{u_0^t}{u_{g0}} = \text{the same}$$

مثال ۳-۴



- به علت تغییر شکل وارد شده (خزش) وسط دهانه‌ها به میزان ۱۵۰mm افت کرده است. بنابراین تغییر شکل عرشه را می‌توان به صورت سینوسی با دامنه حداکثر ۷۵mm و طول موج 30.5m فرض نمود.

- خودرو (مدل سازی شده با یک سیستم یک درجه آزاد) در حالت پر ۱٫۸۲ تن می‌باشد. سختی فنر سیستم تعلیق خودرو 145 kg/cm بوده و میرایی یک نیرو ۴۰ درصد است.

مطلوبست الف) دامنه u_0^t لرزش قائم ماشین وقتی خودرو با سرعت ثابت ۶۵ کیلومتر بر ساعت حرکت می‌کند.

ب) وقتی سرعت خودرو چقدر است که ایجاد تشدید می‌کند.

ج) حل قسمت الف با فرض وزن خودرو برابر 1.35 ton (تعداد سرنشین کم)

حل الف)

$$\left.\begin{aligned} u_g(t) &= \overset{\overset{75\,mm}{\uparrow}}{u_{g0}} \sin \omega t \\ \omega &= \frac{2\pi}{T},\ T = \frac{L}{V} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_g(t) = 75 \sin 3.72\, t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 8.84\ \frac{rad}{s} \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} = 0.42$$

$$TR = \frac{u_0^t}{u_{g0}} = \left[\frac{1 + [2\times0.4\times0.420]^2}{[1-0.420^2]^2 + [2\times0.4(0.420)]^2}\right]^{1/2} = 1.186$$

$$\Rightarrow u_0^t = 1.186 \times 75^{mm} = 89^{mm}$$

حل ب) اگر ζ کوچکتر بود، تشدید در $\frac{\omega}{\omega_n}=1$ رخ میداد ولی ζ قابل توجه است.

طبق تعریف پدیده تشدید زمانی رخ میدهد که TR حداکثر گردد. ($\beta=\frac{\omega}{\omega_n}$)

$$\Rightarrow TR^2=\frac{1+0.64\beta^2}{(1-2\beta^2+\beta^4)+0.64\beta^2}=\frac{1+0.64\beta^2}{\beta^4-1.36\beta^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{d(TR^2)}{d\beta}=0 \Rightarrow \beta=0.893 \Rightarrow \omega=0.893\,\omega_n=0.893\,(8.84)=7.89\ \text{rad/sec}$$

$$\Rightarrow V=\frac{\omega L}{2\pi}=\frac{7.89\times 30.5}{2\pi}=38.3\ \text{m/sec}=138\ \text{km/h}$$

حل ج) ضریب c ثابت است ولی ζ تغییر میکند (چون m عوض شده)

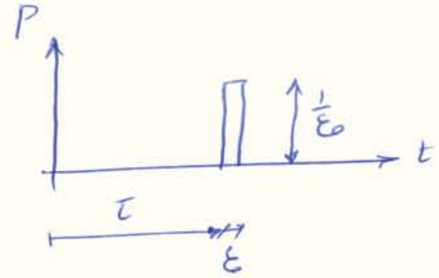
$$c=2\zeta_{full}\sqrt{k m_f}=2\zeta_{empty}\sqrt{k m_e} \Rightarrow \zeta_e=\zeta_f\left(\frac{m_f}{m_e}\right)^{1/2}=0.4\left(\frac{1.82}{1.35}\right)^{1/2}=0.464$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{145}{1350/981}}=10.265\ \text{rad/sec} \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n}=\frac{3.72}{10.265}=0.363$$

$$\Rightarrow TR=\frac{u_o^t}{u_{go}}=\cdots=1.133 \Rightarrow u_o^t=1.133\,u_{go}=1.133\,(75)\simeq 85\ \text{mm}$$

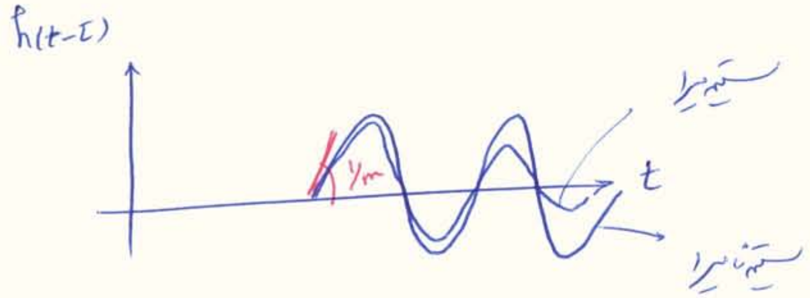
پاسخ به نیروی تابع ضربه دلخواه

قانون دوم نیوتن $\Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{u}) = p$ تغییرات مومنتوم (مقدار حرکت) جسم مساوی نیروی وارده است $\xrightarrow[\text{ثابت باشد}]{m \text{ اگر}}$ $p = m\ddot{u}$



$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 1 & t=\tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

دلتای دیراک



انتگرال‌گیری از دو طرف قانون نیوتن $\Rightarrow$

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} p\,dt}_{\text{مقدار ضربه}} = m(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = \underbrace{m\,\Delta\dot{u}}_{\text{مومنتم}}$$

اگر $\varepsilon \to 0$ آنگاه نیرو در زمان بی‌نهایت کوچکی اعمال می‌شود $\Leftarrow$ فنر و میراگر مجالی برای واکنش ندارند.

پس اگر ضربه واحد در لحظه $t=\tau$ به جرم m اثر نماید آنگاه: (در $u(\tau)=0$)

$$\dot{u}(\tau) = \frac{1}{m}$$

پس ضربه واحد یک ارتعاش آزاد در سیستم میرا یا نامیرا به علت سرعت اولیه با شرایط اولیه $u(\tau)=0$ ، $\dot{u}(\tau)=1/m$ حاصل گردد.

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{نامیرا SDOF} \Rightarrow h(t-\tau) = u(t) = \dfrac{1}{m\omega_n}\sin[\omega_n(t-\tau)] \\[2ex] \text{میرا SDOF} \Rightarrow h(t-\tau) = u(t) = \dfrac{1}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] \end{cases}$$

اگر $p(t)$ تابع دلخواهی از زمان باشد، آن را می‌توان به صورت بی‌نهایت ضربه‌های کوتاه متوالی نشان داد.

$$du(t) = [p(\tau)d\tau]\, h(t-\tau) \qquad t > \tau$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \int_0^t p(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$$

سیستم نامیرا

$$\Rightarrow \quad u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin[\omega_n (t-\tau)]\, d\tau$$

سیستم میرا

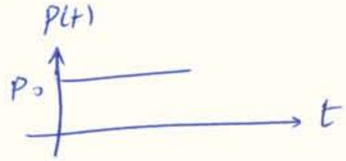
$$\Rightarrow \quad u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau)\, e^{-\zeta\omega_n (t-\tau)} \sin[\omega_D (t-\tau)]\, d\tau$$

با شرایط اولیه صفر

به عنوان مثال اگر در سیستم میرا، شرایط اولیه صفر نباشد، باید پاسخ فوق با پاسخ ذیل (پاسخ ارتعاش آزاد SDOF میرا که $u(0)$ و $\dot{u}(0)$) باید جمع گردند.

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u(0)\cos\omega_D t + \left(\frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D}\right)\sin\omega_D t\right]$$

$$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

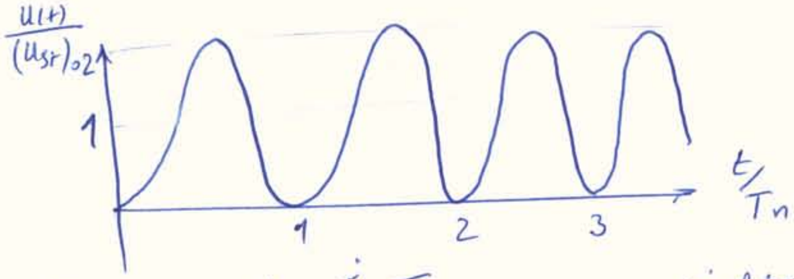


پاسخ به نیروی پله‌ای

فرض SDOF نامیرا داشته باشیم

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t p_0 \sin[\omega_n(t-\tau)]\,d\tau = \frac{p_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin[\omega_n(t-\tau)]\,d\tau$$

$$= \cdots = (u_{st})_0\,(1-\cos\omega_n t)$$



$$\frac{du(t)}{dt} = 0 \Rightarrow t = \frac{j}{2}T_n \quad , \quad j: \text{عدد صحیح فرد}$$

$$\Rightarrow u_0 = 2(u_{st})_0$$

$\Rightarrow$ تغییر شکل ناشی از اعمال ناگهانی نیرو، دو برابر حالت استاتیکی است

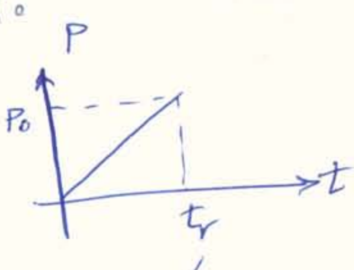
$\Rightarrow$ نوزادی از خواب بیدار کنید !

از حل انتگرال دوهامل برای SDOF میرا $\Rightarrow$

$$u(t) = (u_{st})_0\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D t\right)\right]$$

به مراتب سخت‌تر از حل قبلی است که بر اساس جواب خصوصی و عمومی حاصل شده بود

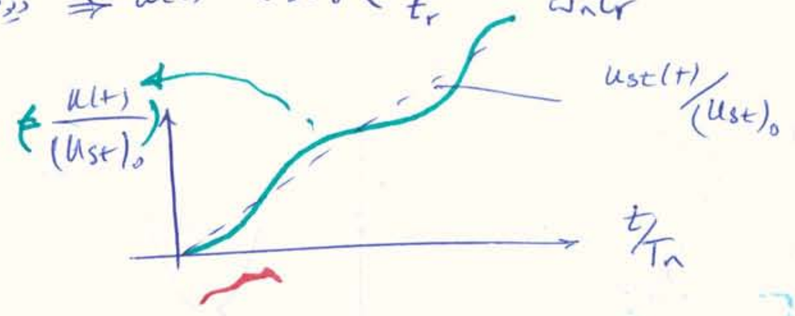
پاسخ به نیروی شیب‌دار



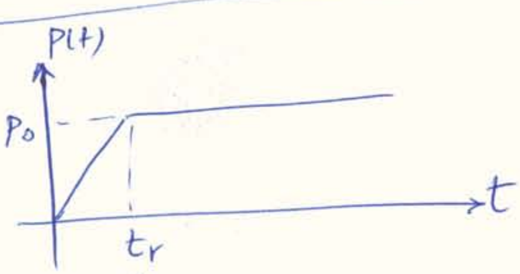
زمان صعود

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t \frac{P_0 \tau}{t_r} \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \text{دوهامل} \Rightarrow u(t) = (u_{st})_0 \left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_r} \right)$$



پاسخ به نیروی شیب‌دار - پله‌ای



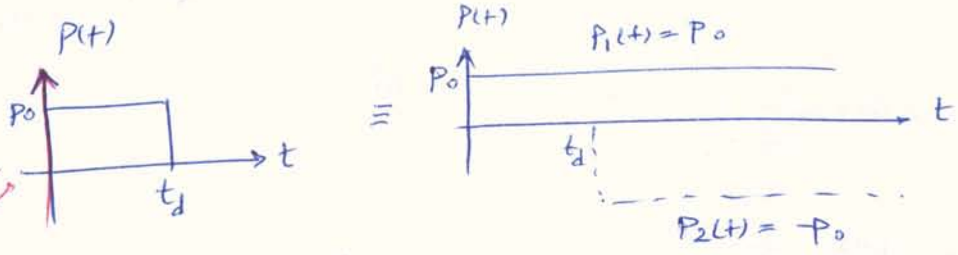
زمان صعود

$$u(t) = (u_{st})_0 \left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_r} \right) \qquad t \le t_r$$

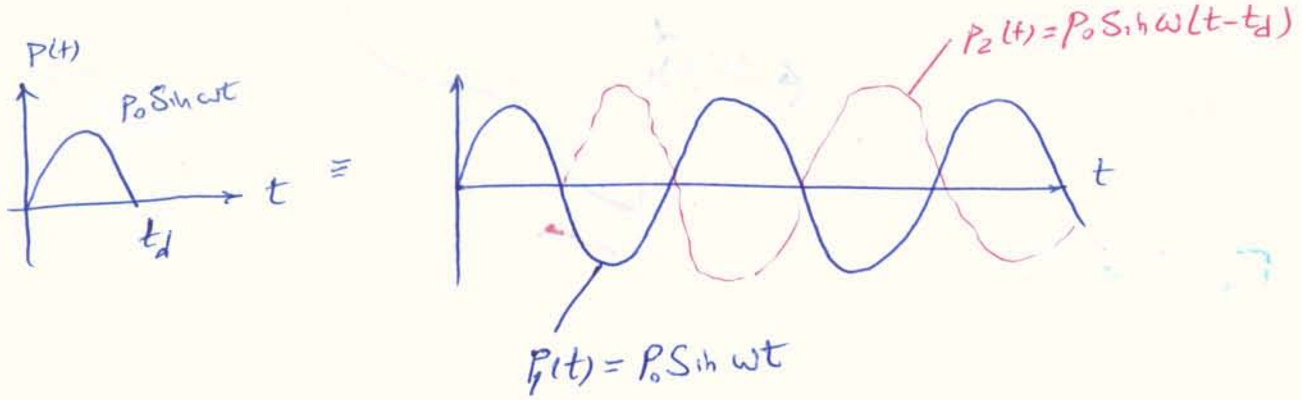
$$u(t) = u(t_r)\cos\omega_n(t-t_r) + \frac{\dot u(t_r)}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_r) + (u_{st})_0\left[1-\cos\omega_n(t-t_r)\right] \qquad t > t_r$$

[illegible] :

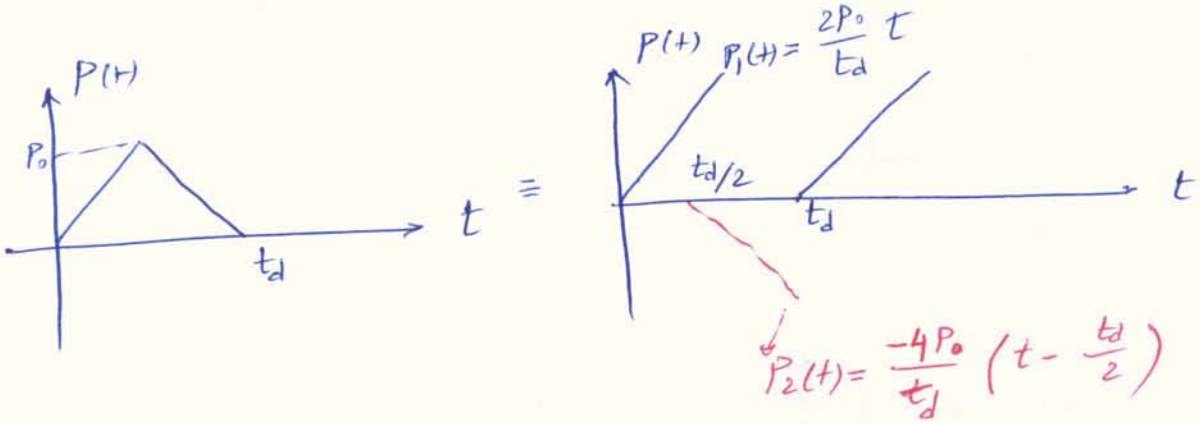
مستطیلی



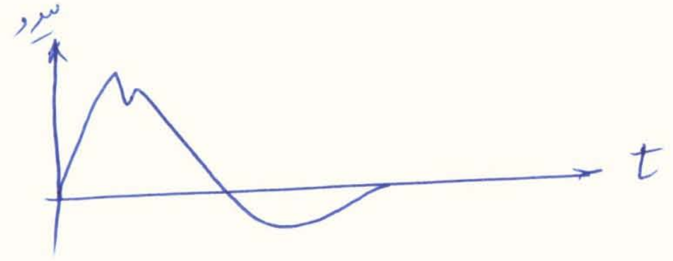
نیم سینوسی



مثلثی



پاسخ به تحریک ضربه‌ای



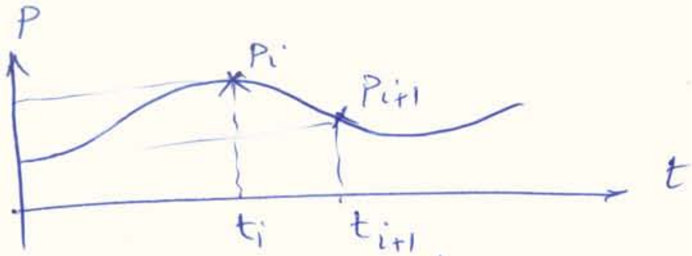
نیروی ناشی از انفجار

* معمولاً برای سیستم‌های بدون میرایی مورد محاسبه قرار می‌گیرد. چون میرایی در این نوع بارگذاری‌ها مجال تأثیر نخواهد داشت.

روش‌های عددی برای تحلیل دینامیکی

$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=P(t)$ شرایط اولیه $\begin{cases} u=u(0) \\ \dot{u}=\dot{u}(0) \end{cases}$

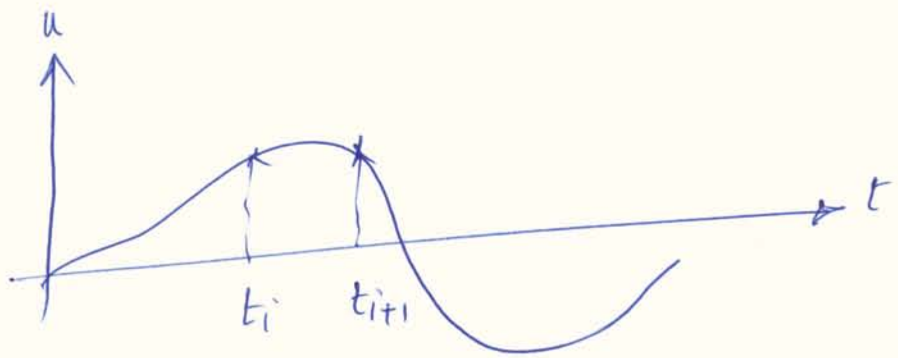
در زمان i ام تغییر مکان، سرعت و شتاب به صورت u_i ، $\dot{u}_i$ و $\ddot{u}_i$ نشان داده می‌شوند.

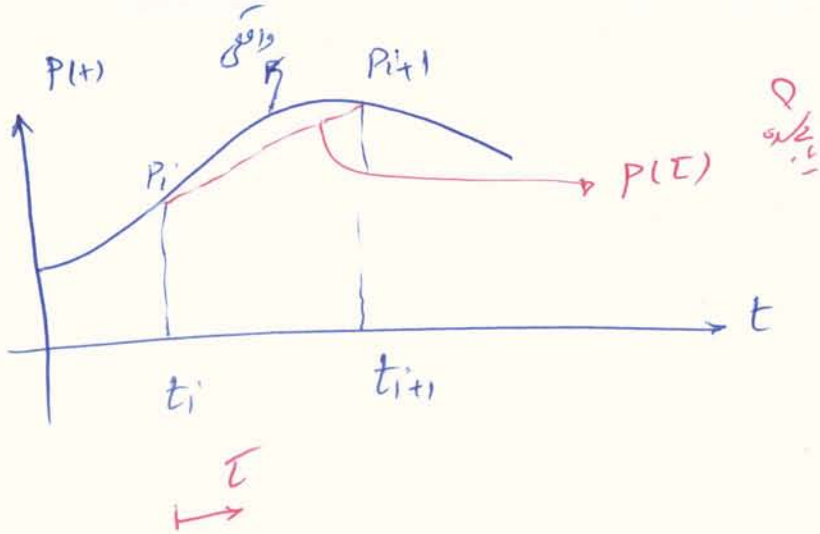


$$m\ddot{u}_i+c\dot{u}_i+ku_i=P_i$$

$$m\ddot{u}_{i+1}+c\dot{u}_{i+1}+ku_{i+1}=P_{i+1}$$

پس پاسخ سازه را می‌توان به صورت تک مجزا در t_i و t_{i+1} بدست آورد.





درون یابی خطی

روش تحلیل درون‌یابی تابع تحریک

$$p(\tau) = P_i + \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\tau \qquad \text{where} \quad \Delta P_i = P_{i+1} - P_i$$

$$\Longrightarrow \quad m\ddot{u} + ku = P_i + \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\tau$$

پاسخ $u(\tau)$ در فاصله زمانی $0 \le \tau \le \Delta t_i$ که حاصل جمع سه مقدار ذیل است:

۱- ارتعاش آزاد به علت تغییر مکان اولیه u_i و سرعت $\dot{u}_i$ در لحظه $\tau = 0$.

۲- پاسخ به نیروی پله‌ای P_i با شرایط اولیه صفر.

۳- پاسخ به نیروی شیبدار $\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\tau$ با شرایط اولیه صفر.

بنابراین:

$$u(\tau) = u_i \cos\omega_n\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\sin\omega_n\tau + \frac{P_i}{k}(1-\cos\omega_n\tau) + \frac{\Delta P_i}{k}\left(\frac{\tau}{\Delta t_i} - \frac{\sin\omega_n\tau}{\omega_n\Delta t_i}\right)$$

$$\frac{\dot{u}(\tau)}{\omega_n} = -u_i\sin\omega_n\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\cos\omega_n\tau + \frac{P_i}{k}\sin\omega_n\tau + \frac{\Delta P_i}{k}\frac{1}{\omega_n\Delta t_i}(1-\cos\omega_n\tau)$$

با حل روابط قبلی در $\tau = \Delta t_i$ ، تغییر مکان u_{i+1} و سرعت $\dot{u}_{i+1}$ در زمان $i+1$ را بدست می‌آید.

$$u_{i+1} = u_i \cos(\omega_n \Delta t_i) + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\sin(\omega_n \Delta t_i) + \frac{P_i}{K}\left(1-\cos(\omega_n \Delta t_i)\right)$$
$$+ \frac{\Delta P_i}{K}\,\frac{1}{\omega_n \Delta t_i}\left[\omega_n \Delta t_i - \sin(\omega_n \Delta t_i)\right]$$

$$\frac{\dot{u}_{i+1}}{\omega_n} = -u_i \sin(\omega_n \Delta t_i) + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\cos(\omega_n \Delta t_i)$$
$$+ \frac{P_i}{K}\sin(\omega_n \Delta t_i) + \frac{\Delta P_i}{K}\,\frac{1}{\omega_n \Delta t_i}\left[1-\cos(\omega_n \Delta t_i)\right]$$

اکنون از رابطه $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$ در روابط فوق قرار دهیم به روابط بازگشتی ذیل می‌رسیم:

$$\begin{cases} u_{i+1} = A u_i + B \dot{u}_i + C P_i + D P_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} = A' u_i + B' \dot{u}_i + C' P_i + D' P_{i+1} \end{cases}$$

ضرایب A و B و C و D

و A' و B' و C' و D' در جدول 5.2.1 آورده شده است. ($\xi<1$)

* درصورتی که Δt_i کم باشد، روش بسیار خوب است (مثل زلزله)
* اگر فواصل زمانی Δt_i یکی باشد، ضرایب فوق را فقط یک بار می‌توان محاسبه کرد.
* محدود است به حالت خطی

تمرین مهم:

- یک زلزله انتخاب کنید و پاسخ سیستم یک درجه آزاد را:

u و $\dot{u}$ و $\ddot{u}$

و طیف آن را محاسبه نمایید.

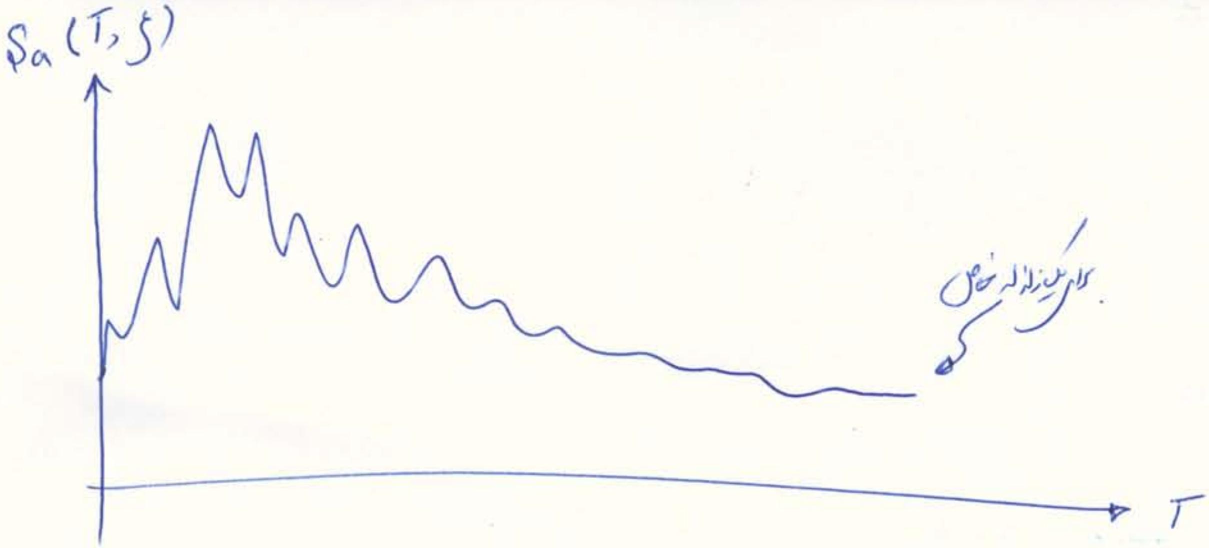
$T = 1\,s$

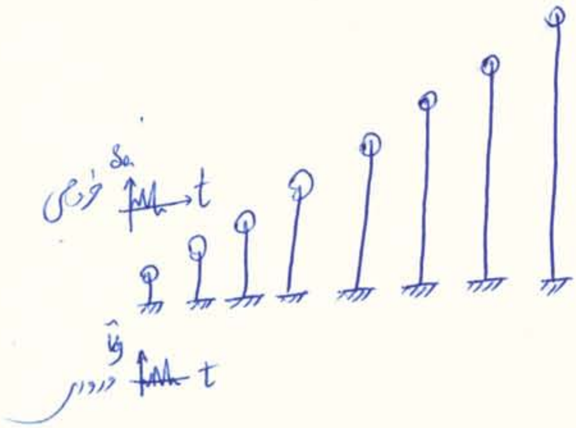
$\xi = 0.05$

محل اخذ شتابنگاشت

http://peer.berkeley.edu/nga

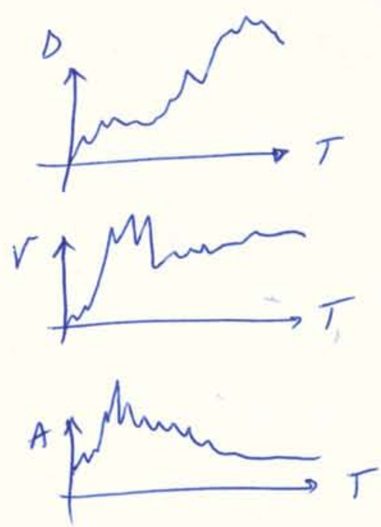
طیف پاسخ





سازه‌های یک درجه آزاد با سختی متفاوت

میرایی یکسان



طیف تغییر مکان (۱) $u_o(T_n,\xi) \equiv \max_t |u(t,T_n,\xi)|$

طیف سرعت $\dot{u}_o(T_n,\xi) \equiv \max_t |\dot{u}(t,T_n,\xi)|$

طیف شتاب $\ddot{u}_o^t(T_n,\xi) \equiv \max_t |\ddot{u}^t(t,T_n,\xi)|$

چون سرعت‌ها را حساب می‌شود :

$$V = \omega_n D = \frac{2\pi}{T_n} D$$ Pseudo-velocity Response Spectrum

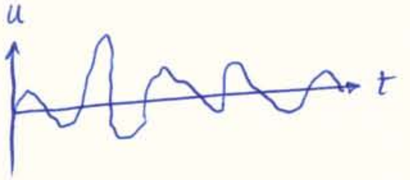
$$A = \omega_n^2 D = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 D$$ Pseudo-acceleration Response Spectrum

---

اول نقطه شود

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = -\ddot{u}_g(t) \Rightarrow u \equiv u(t, T_n, \zeta)$$

برای دو سیستم با T_n یکسان، تاریخچه‌ی زمانی u یکسان خواهد بود. حتی اگر k و m متفاوت باشند



$A(t)$ شبه شتاب $\neq \ddot{u}^t(t)$

نیروی داخلی

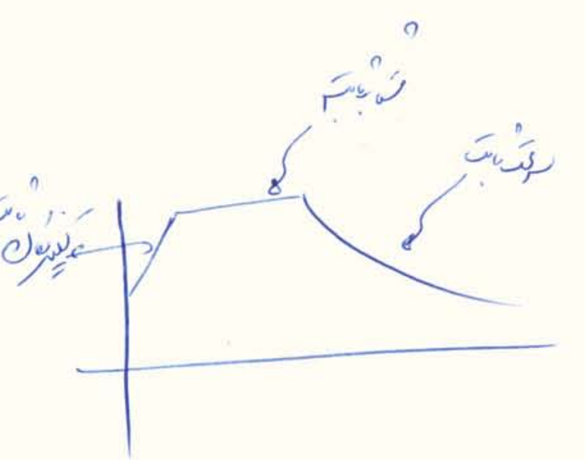
$$\left.\begin{aligned} f_s(t) &= k\,u(t) \\ \omega_n &= \sqrt{k/m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_s(t) = m\,\omega_n^2 u(t) = m\,A(t)$$

حداکثر f_s برش پایه است.

همچنین کمیت V دارای بعد سرعت است
شبه سرعت نیز حداکثر (شبه سرعت)

$$V = \omega_n D = \frac{2\pi}{T_n} D$$

حداکثر انرژی کرنشی در حین زلزله $= \frac{1}{2} k u_0^2 = \frac{1}{2} k D^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{V}{\omega_n}\right)^2 = \frac{1}{2} m V^2$



حداکثر f_s برش پایه است

$$V_{b0} = f_{s0} = m A_0$$
$$= \frac{w}{g} A_0$$

جرم لرزه‌ای سازه
= جرم نیروی جانبی

روش شبه استاتیکی

- اولین بار در اوائل دهه اول قرن بیستم براساس تجربیات و مطالعات انجام شده بر روی رفتار سازه‌ها در زلزله‌ای در مسینا (ایتالیا) پیشنهاد گردید. براساس این پیشنهاد $\frac{1}{12}$ وزن سازه به عنوان نیروی جانبی در نظر گرفته می‌شود.

- در دهه ۱۹۳۰، با استفاده از قانون دوم نیوتن و فرض صلب بودن سازه

$$V = M\,a(t)$$

$$= \frac{W}{g}\,a(t)$$

$$\Rightarrow V_{max} = \frac{W}{g}a_{max} = CW = \text{وزن سازه} \times \text{ضریب زلزله}$$

- اولین بار این رابطه در ۱۹۲۷ در آیین‌نامه UBC با مقدار $C = 0.075$ تا $C = 0.1$ گنجانیده شد. ولی مورد استفاده قرار نگرفت.

- بعد از سال ۱۹۴۴ در لس‌آنجلس (آمریکا) به بعد آیین‌نامه‌های اجباری در نظر گرفته شد و برای ساختمان‌های مهم و مدارس 0.1 و برای سازه‌های معمولی به مقدار 0.08 اتخاذ شد.

- کاهش ضریب C از ضریب $\frac{a_{max}}{g}$ که در زلزله‌های شدید بین 0.3 تا 0.8 و حتی بیشتر است، به مقداری در حدود 0.1 با توجه به احتمال وقوع زلزله، شکل‌پذیری و رفتار غیرارتجاعی سازه‌ها و ظرفیت جذب انرژی در آنهاست.

در سال ۱۹۴۴ با درک رفتار سازه‌ها براساس T آنها، مقدار C به تعداد طبقات ساختمان ارتباط داده شد.

$$C = \frac{0.6}{N+4.5} \qquad N \geq 13$$

- سال ۱۹۴۹

$$V = K \cdot C \cdot W \qquad K = \frac{2}{3} \text{ تا } \frac{4}{3} \text{ (ضریب رفتار)}$$

$$C = \frac{0.05}{T^{1/3}}$$

- سال ۱۹۷۸

$$V = ZIKCSW$$

Z: ضریب احتمال وقوع زلزله

I: ضریب اهمیت، شکل و نحوه استفاده از ساختمان

K: ضریب رفتار سازه

C: ضریب زلزله در درصدی از وزن (شدت زلزله است.)

S: ضریب تشدید که جنس خاک زمین (سنگ و بافت و خاک رس)

آیین‌نامه ۲۸۰۰ -

$$V = CW = \frac{ABI}{R} W$$

I: ضریب اهمیت

AB: طیف پاسخ طرح

R: ضریب رفتار

Combined D-V-A Spectrum

رابطه بین : $\frac{A}{\omega_n} = V = \omega_n D \Longrightarrow \boxed{\frac{T_n}{2\pi} A = V = \frac{2\pi}{T_n} D}$

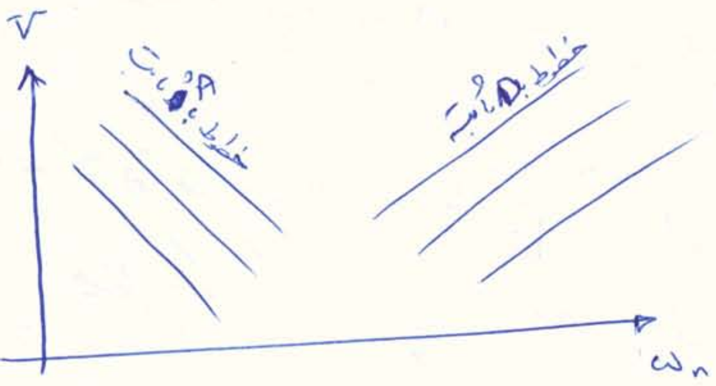
* چرا به هر سه طیف احتیاج داریم؟

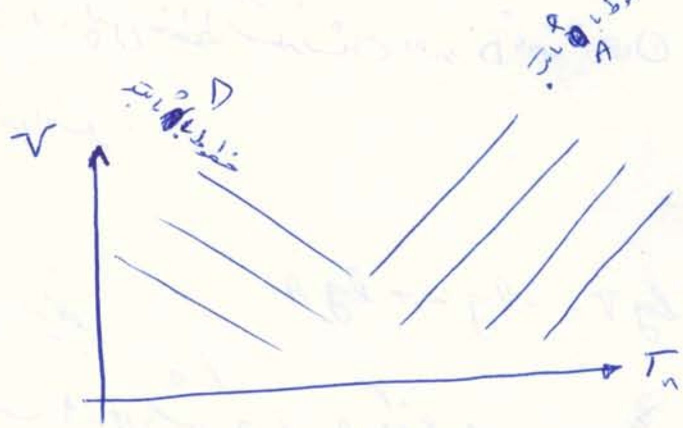
۱- طیف تغییر شکل حداکثر ← بیانگر تغییر شکل سیستم است.

۲- طیف شبه سرعت ← معرف حداکثر انرژی کرنشی ذخیره شده در سیستم است.

۳- طیف شبه شتاب ← معرف حداکثر نیروی معادل استاتیکی و برش پایه است.

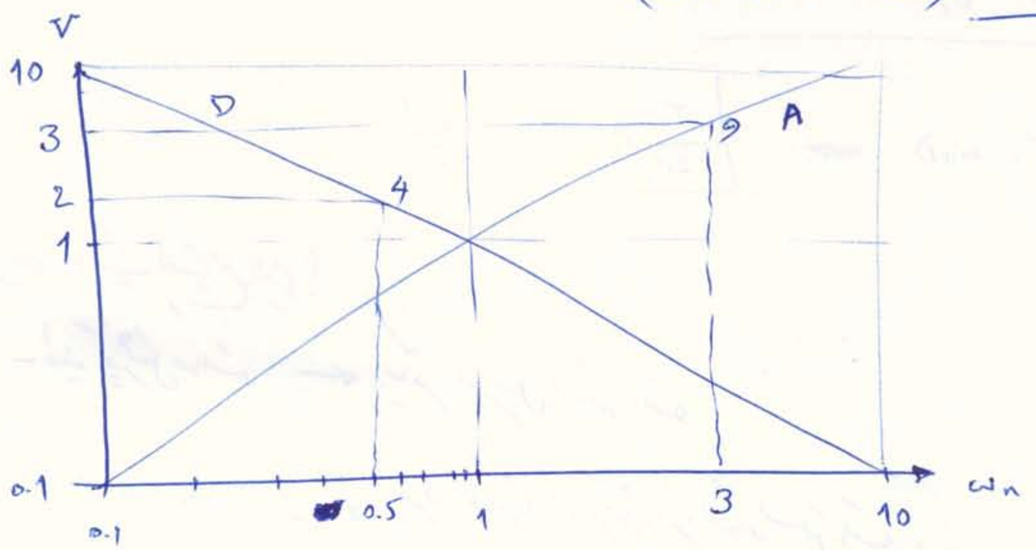
Veletsos & Newmark (1960) → طیف ترکیبی D-V-A را پیشنهاد کردند که بسیار سودمند است.





نکته: مقیاس های محورهای ω_n و V با هم یکی بوده و محورهای D و A نسبت به یکدیگر یکی اند.

اسپکت کاغذ ترسیمی لگاریتمی چهار جانبه (پیوست ۳ فصل ۳ و آخر فصل ۶)



* $\log V$ محور عرض‌ها و $\log \omega_n$ محور طول هاست.

*

داریم $\frac{A}{\omega_n} = V = \omega_n D \Rightarrow \log V = \log \omega_n + \log D$

اگر D ثابت باشد، رابطه فوق خط مستقیم با شیب ۱+ می‌باشد. پس خطوط شبکه نشان دهنده D ثابت، همان خطوط مستقیم با شیب ۱+ هستند که محور D بر آنها عمود است.

* اگر A ثابت باشد، رابطه روبرو خط مستقیم با شیب ۱- است. در نتیجه $\Rightarrow \log V = -\log \omega_n + \log A$

خطوط شبکه‌ای که A ثابت را نشان می‌دهد همان خطوط با شیب ۱- می‌باشند که محور A بر آنها عمود است.

حال باید مقیاس‌ها را مشخص کنیم:

۱- نقطه تقاطع $\begin{cases}\omega_n = 1 \\ V = 1\end{cases}$ با بد محورهای A و D را هم ۱ بنامیم.

$$\text{if } \omega_n = 1,\ V = 1 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ D = 1 \end{cases}$$

۲- محور A دارای شیب ۱+ است، پس نقطه روی آن دارای ω_n و V یکسان هستند، مثلاً اگر $A = 9 \Rightarrow \begin{cases}\omega_n = 3 \\ V = 3\end{cases}$

به عبارت دیگر مثل این است که $\omega_n = \sqrt{A}$، $V = \sqrt{A}$ تا در رابطه $A = \omega_n V$ صدق نماید.

~~$\omega_n = \sqrt{A}$, $V = \sqrt{A}$~~

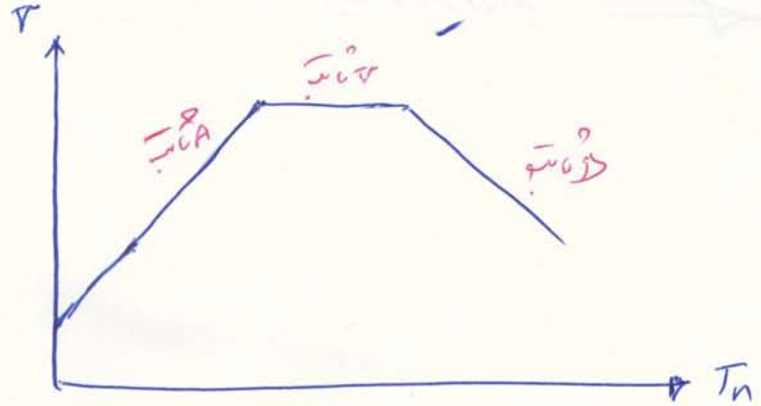
۳- محور D دارای شیب ۱- است

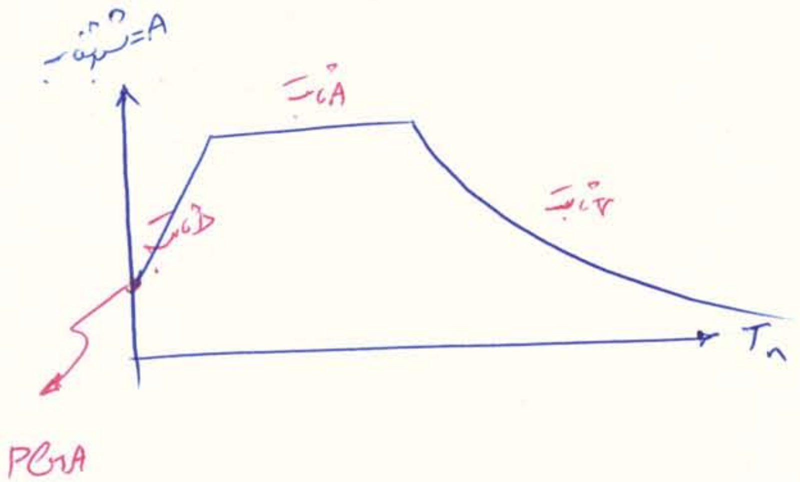
به عبارت دیگر مثل این است که $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{D}}$، $V = \sqrt{D}$ باید باشد تا در معادله $D = \frac{V}{\omega_n}$ صدق نماید. $\Leftarrow$

$$\text{if } D = 4 \Rightarrow V = 2,\ \omega_n = 1/2$$

طیف تریپارتیت سه‌حالته

در مقیاس لگاریتمی





برای T های کم ; let say $T_n < 0.035$ (s) $\Rightarrow$ $A \longrightarrow \ddot{u}_{go}$ و A مستقل از m است

از نظر فیزیکی یعنی اینکه صلبیت خیلی بسیار زیاد بوده و ~~...~~ سازه با زمین حرکت می‌کند.

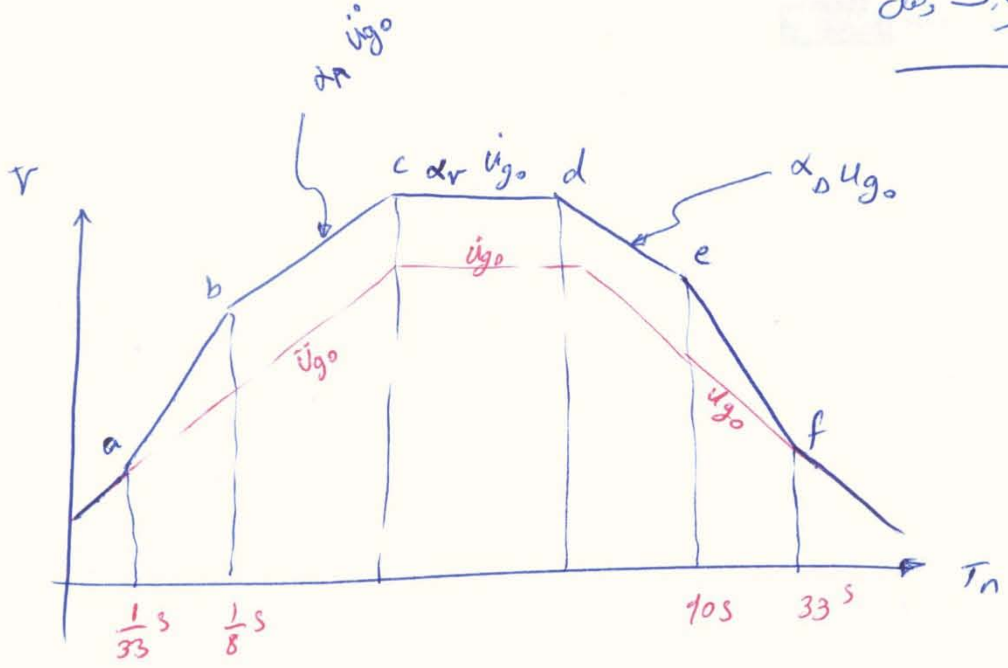
برای T های زیاد ; let say $T_n > 15$ (s) $\Rightarrow$ $D \longrightarrow u_{go}$ و D مستقل از نیرو است.

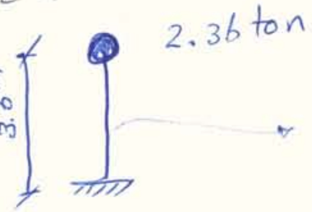
نیروهای داخلی خیلی کوچک هستند $\Leftarrow$ نیرو $= m \times A$ $\Leftarrow$ و A خیلی کوچک است

از نظر فیزیکی یعنی جرم ثابت و زمین حرکت می‌کند.

حوضچه هرچه بیشتر باشد ، عملیه بارگیری تسریع می‌یابد ← می‌توان در سازه‌های بزرگ از آن استفاده نمود.

طیف نیومارک و هال





مثال 6.2 کتاب

قطر خارجی لوله = 114 mm

قطر داخلی لوله = 102 mm

$t = 6^{mm}$, $w = 16\ kg/m$, $I = 301\ cm^4$, $E = 2\times10^6\ kg/cm^2$

با فرض $\zeta = 2\%$ تغییر شکل حداکثر و تنش های خمشی حداکثر این میله را تحت اثر زلزله ال سنترو تعیین نمایید.

حل :

$$k = \frac{3EI}{l^3} = \frac{3\times2\times10^6\times301}{360^3} = 38.7\ kg/cm$$

از وزن ستون در مقابل وزن جرم صرفنظر می کنیم $\Rightarrow$ $m = \frac{w}{g} = 2.41\ kg\ s^2/cm$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{k/m} = 4\ rad/s$$

$$\Rightarrow T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 1.58\ s \xrightarrow[\text{السنترو با } \zeta = 2\%]{\text{از طیف زلزله}} D = 12.5\ cm,\quad A = 0.20g$$

$\Rightarrow$ حداکثر نیروی استاتیکی معادل $= f_{s_0} = \frac{A}{g} w = 0.2\times2.36 = 0.47\ ton$

$\Rightarrow$ لنگر خمشی در پای ستون $= M = 0.47\times3.6 = 1.69\ ton.m \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = 3200\ kg/cm^2$

تنش فوق خیلی زیاد است! (نامطلوب است چون در زمان الاستیک عمل نمی شوند)

~~[illegible]~~

حال فرض کنید که مهندس طراح تصمیم بگیرد قطر لوله را افزایش دهد.

قطر خارجی $= 219^{mm}$

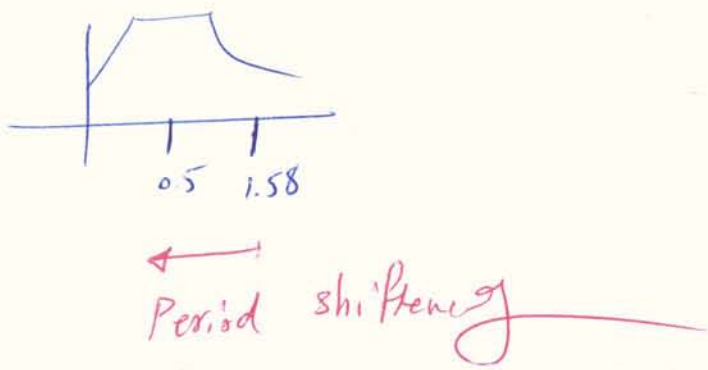
قطر داخلی $= 202.7\ mm$, $t = 8.15\ mm$, $I = 3018\ cm^4$

در این حالت $\Rightarrow \cdots \Rightarrow T_n = 0.5\ (s) \Rightarrow \begin{cases} D = 6.58\ cm \\ A = 1.1g \end{cases}$

$$\Rightarrow f_{s_0} = \frac{A}{g} W = 1.1 \times 2.36 = 2.6\ ton$$

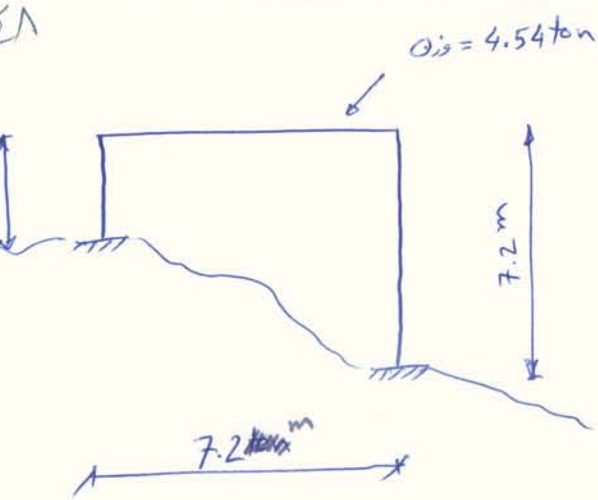
$$\Rightarrow M_{base} = 2.6 \times 3.6 = 9.36\ Ton.m \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{MC}{I} = 3396\ kg/cm^2$$

جالب اینجاست که افزایش قطر لوله تغییر شکل را کاهش داد ولی باعث افزایش تنش شد (کاهش زمان تناوب طبیعی)



انتظار ما برای اینکه تنش کاهش پیدا کند ناشی از اینست که به صورت فرضی به چشم نیروی استاتیکی می نگریم.

مثال 6.5



Beams 100 × 25

Columns 25 × 25 cm

$\zeta = \%5$

$E = 2\times10^{5}\ \frac{kg}{cm^2}$

مطلوبست تعیین حداکثر تغییر شکل و نیروی الاستیکی و نیروی برشی ستونها تحت طیف زلزله السنترو.

حل: با توجه به سختی زیاد تیر نسبت به ستونها از فرض تیر صلب استفاده می‌شود.

$$k = \sum\left(\frac{12EI}{l^3}\right) = \underbrace{\frac{12\times2\times10^{5}\times\left(\frac{25^4}{12}\right)}{360^3}}_{1675} + \underbrace{\frac{12\times2\times10^{5}\left(\frac{25^4}{12}\right)}{720^3}}_{209} = 1884\ \frac{kg}{cm}$$

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{W}{gk}} = 0.3\ sec \xrightarrow[\text{السنترو}]{\text{طیف زلزله}} \begin{array}{l} D = 1.80\ cm \\ A = 0.76g \end{array}$$

$$V_{short} = k_{short}\,D = 1675\times1.80\times10^{-3} = 3.02\ ton$$

$$V_{long} = k_{long}\,D = 209\times1.80\times10^{-3} = 0.38\ ton$$

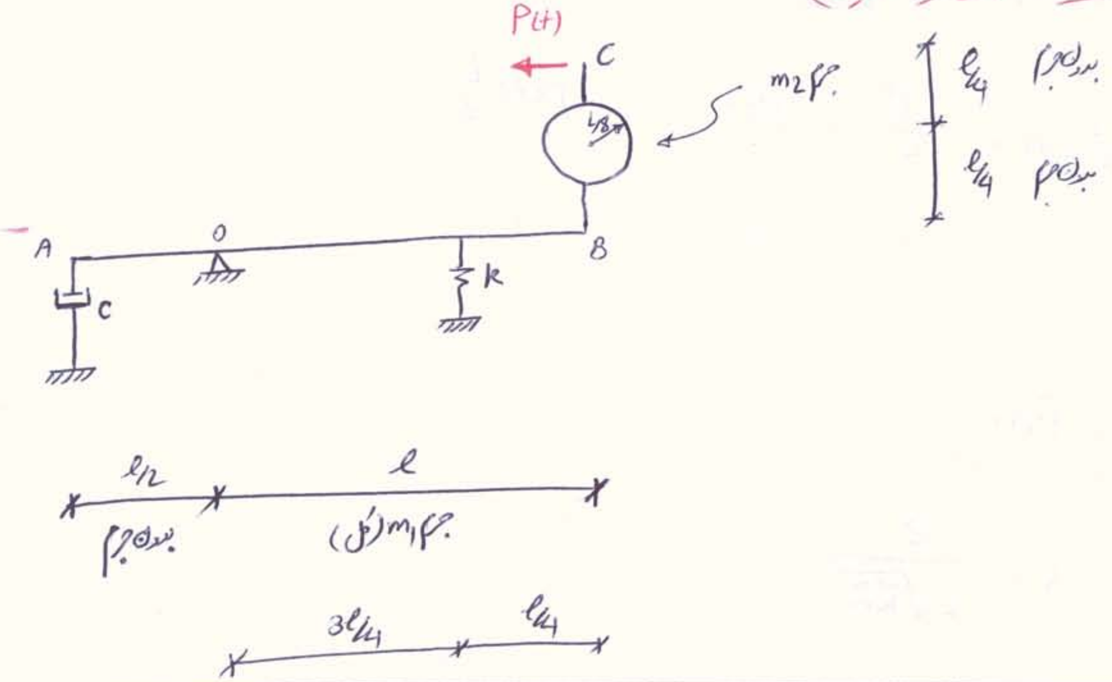
هر دو ستون تغییر شکل یکسانی را تحمل می‌کنند ولیکن نیروی برشی بوجود آمده در آنها بسیار متفاوت است.

نادیده گرفتن همین قانون ساده باعث بروز خسارات پیش‌بینی نشده‌ای در سازه‌ها گردیده است.

Generalized SDOF systems

* بسیاری از سازه‌ها و سیستم‌ها قابل تبدیل به سیستم SDOF هستند.

مثال 8.1 مطلوبست معادلهٔ حرکت. (با تغییر شکل دقیق)

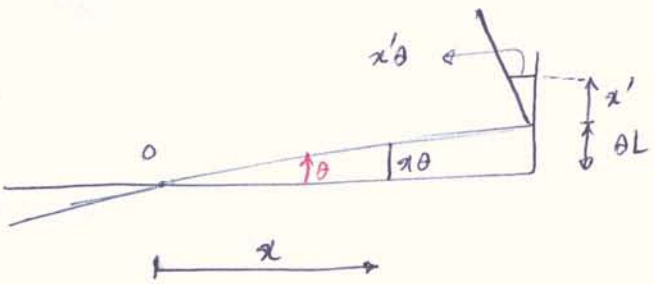


- میله AB صلب است.

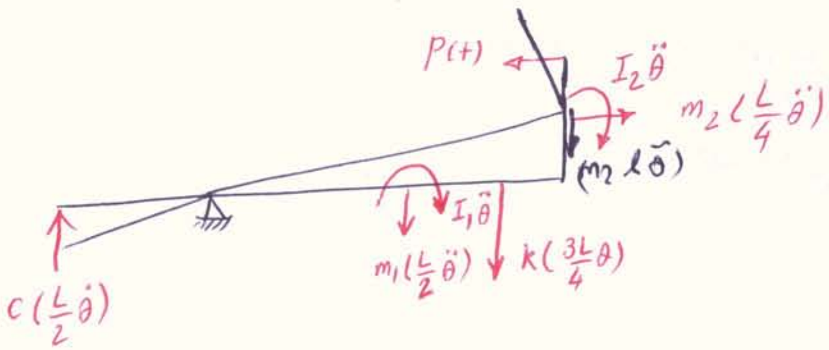
حل:

$$u(x,t)=\underbrace{\psi(x)}_{x}\,\underbrace{Z(t)}_{\theta(t)}$$

نحوهٔ تغییر شکل:



تعادل دینامیکی:



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow I_1\ddot{\theta} + \left(m_1 \frac{L}{2}\ddot{\theta}\right)\frac{L}{2} + I_2\ddot{\theta} + (m_2 L\ddot{\theta})L + \left(m_2 \frac{L}{4}\ddot{\theta}\right)\frac{L}{4} + \left(c\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)\frac{L}{2} + \left(k\,\frac{3L}{4}\theta\right)\frac{3L}{4} = P(t)\,\frac{L}{2}$$

$$I_1 = \frac{m_1 L^2}{12}, \quad I_2 = m_2 \left(\frac{L}{8}\right)^2\Big/2 = m_2\frac{L^2}{128}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{m_1 L^2}{3} + \frac{137}{128}m_2 L^2\right)}_{\tilde{m}}\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{cL^2}{4}}_{\tilde{c}}\dot{\theta} + \underbrace{\frac{9kL^2}{16}}_{\tilde{k}}\theta = \underbrace{P(t)\frac{L}{2}}_{\tilde{P}(t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{m}\ddot{\theta} + \tilde{c}\dot{\theta} + \tilde{k}\theta = \tilde{P}(t)}$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}}, \quad \zeta = \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{\tilde{k}\tilde{m}}}$$

$$\text{if } c=0,\ P(t)=P_0 \Rightarrow \theta(t) = \frac{\tilde{P}}{\tilde{k}}(1-\cos\omega_n t) = \frac{8P_0}{9kL}(1-\cos\omega_n t)$$

توجه شود که

$$u(x,t) = x\,\theta(t)$$

$$u(x',t) = x'\,\theta(t)$$

اگر نیروی خارجی محوری Q نیز به تیر وارد شود (به نقطه B) آنگاه لنگر $QL\theta$ در خلاف دوران فنرها باعث اعمال می‌شود

داریم:

$$\tilde{m}\ddot{\theta} + \tilde{c}\dot{\theta} + (\tilde{k} - QL)\theta = \tilde{P}(t)$$

نیروی محوری باعث کاهش صلبیت و کاهش فرکانس سیستم (افزایش پریود) می‌گردد

$$\text{if } \tilde{k} - QL = 0 \Rightarrow \text{سیستم ناپایدار} \Rightarrow Q_{cr} = \frac{\tilde{k}}{L} = \frac{9kL}{16} = \text{نیروی کمانش بحرانی سیستم}$$

... which $Z(t)$ is the single generalized coordinate expressing the motion of the system and the symbols with asterisks represent generalized physical properties corresponding to this coordinate. In general, the values of these properties can be determined by application of either the principle of virtual work, as illustrated by the previous examples, or Hamilton's principle as illustrated in Chapter 16. However, standardized forms of these expressions can be derived easily which are very useful in practice.

Consider an arbitrary one-dimensional system, as illustrated by the example in Fig. 8-3, assumed to displace only in a single shape $\psi(x)$ with displacements

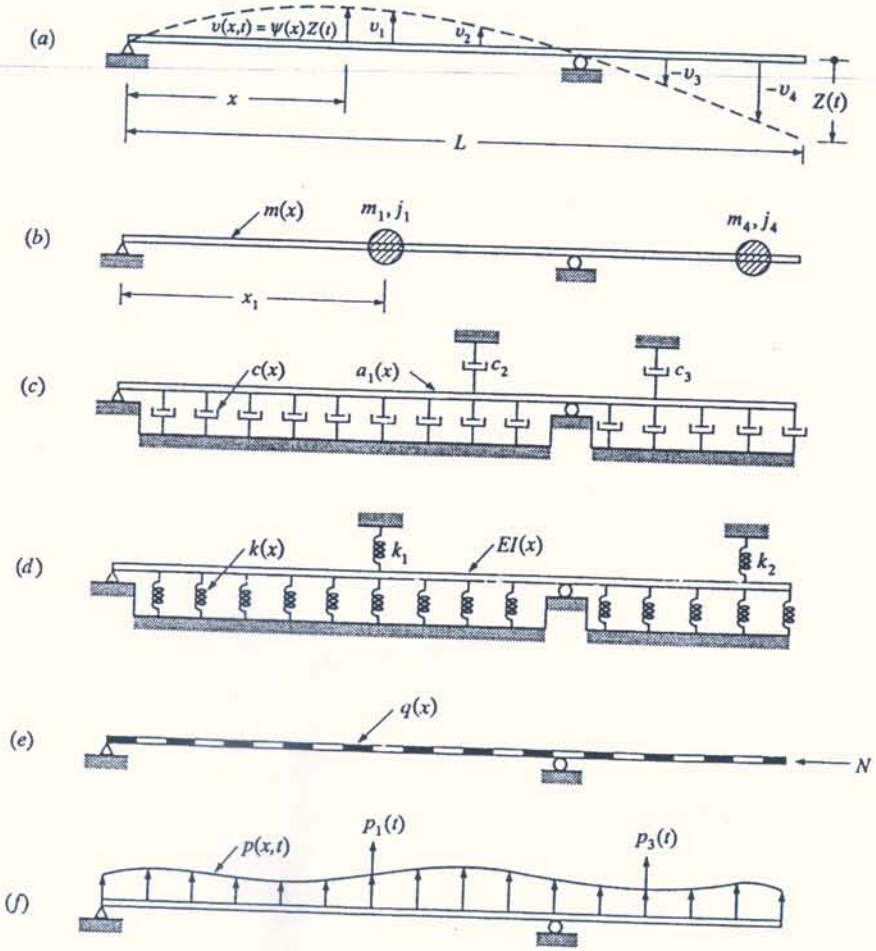


FIGURE 8-3
Properties of generalized SDOF system: (*a*) assumed shape; (*b*) mass properties; (*c*) damping properties; (*d*) elastic properties; (*e*) applied axial loading; (*f*) applied lateral loading.

expressed in terms of the generalized coordinate $Z(t)$ as given by

$$v(x,t) = \psi(x)\, Z(t)$$

Part of the total mass of the system is distributed in accordance with $m(x)$ and the remainder is lumped at discrete locations i $(i = 1, 2, \ldots)$ as denoted by m_i. External damping is provided by distributed dashpots varying in accordance with $c(x)$ and by discrete dashpots as denoted by the c_i values, and internal damping is assumed to be present in flexure as controlled by the uniaxial stress-strain relation of Eq. (8-8). The elastic properties of the system result from distributed external springs varying in accordance with $k(x)$, from discrete springs as denoted by the k_i values, and from distributed flexural stiffness given by $EI(x)$. External loadings are applied to the system in both discrete and distributed forms as indicated by the time-independent axial forces $q(x)$ and N and the time-dependent lateral forces $p(x,t)$ and $p_i(t)$. These loadings produce internal axial force and moment distributions $N(x)$ and $M(x,t)$, respectively.

Applying the procedure of virtual work to this general SDOF system in the same manner as it was applied to the previous example solutions, one obtains the following useful expressions for the contributions to the generalized properties:

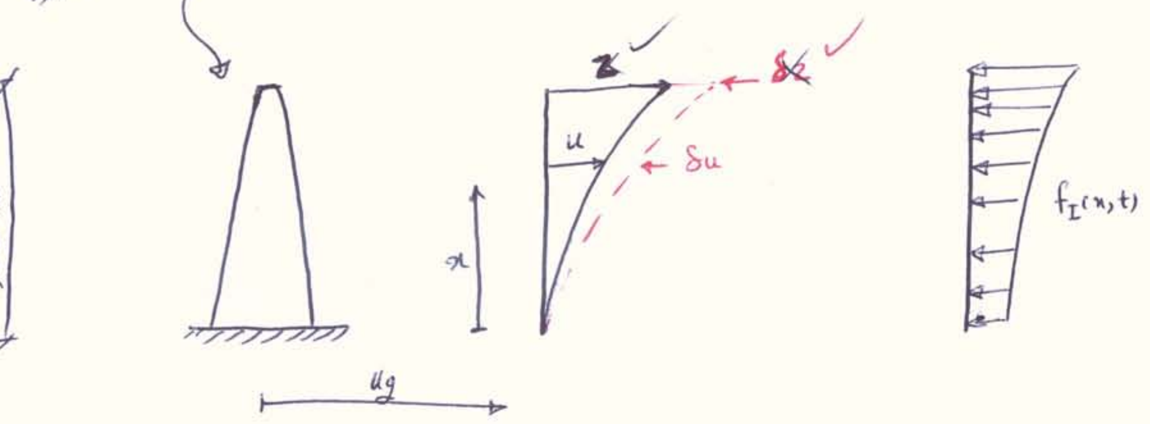
$$\begin{aligned}
m^* &= \int_0^L m(x)\,\psi(x)^2\,dx + \sum m_i\,\psi_i^2 + \sum j_i\,\psi_i'^2 \\
c^* &= \int_0^L c(x)\,\psi(x)^2\,dx + a_1 \int_0^L EI(x)\,\psi''(x)^2\,dx + \sum c_i\,\psi_i^2 \\
\overline{k^*} &= \int_0^L k(x)\,\psi(x)^2\,dx + \int_0^L EI(x)\,\psi''(x)^2\,dx + \sum k_i \psi_i^2 \qquad \text{(8-18)} \\
&\quad - \int_0^L N(x)\,\psi'(x)^2\,dx \\
p^*(t) &= \int_0^L p(x,t)\,\psi(x)\,dx + \sum p_i(t)\,\psi_i(x) + \quad \text{زلزال}
\end{aligned}$$

The vectorial nature of the force and displacement quantities in the last of Eqs. (8-18) must be carefully noted. Only components of the forces in the directions of the corresponding assumed displacements can be included, and the positive sense of each force component must be assigned in accordance with the positive sense of the corresponding displacement.

The above generalized-coordinate concepts apply equally in the reduction of two-dimensional systems to a single degree of freedom. Consider, for example, the rectangular floor slab shown in Fig. 8-4 subjected to a distributed downward loading

تابع تغییر شکل فرضی (بدون حالت نسبی جرم گسترده است و تیر طبقه نیست)

در واقع بی‌نهایت درجه آزادی دارد.



بعد

$x=\ell \longrightarrow$

$u(\ell,t)=z(t)$

$\psi(\ell)=1$ و چون

$$\overset{t}{u}(x,t)=u(x,t)+u_g(t) \qquad (1)$$

$$u(x,t)=\psi(x)\,z(t) \xrightarrow[\text{مرزی}]{\text{شرایط}} \psi(0)=0 \ ,\ \psi'(0)=0$$

حال می‌توانیم تابع ψ را فرض کنیم، برای شکل تغییر شکل $\overset{1}{\downarrow}$ ⟵ به صورت ذیل است:

$$u(x)=(3Lx^2-x^3)/6EI$$

$$\xrightarrow[\text{خود واحد شد}]{\text{چون برای z داریم}} \psi(x)=\frac{u(x)}{\underset{z}{u(L)}}=\frac{3x^2}{2L^2}-\frac{x^3}{2L^3}$$

باید به دست آید $u(x)=\psi(x)\,z$

* نکته: می‌توان از توابع دیگری هم استفاده کرد. $\psi(x)=\frac{x^2}{L^2}$ ، $\psi(x)=1-\cos\frac{\pi x}{2L}$ نیز استفاده کرد. ضمناً واحد شدن تابع ψ لزوماً خود نیز الزامی نیست.

$$f_I(x,t)=-m(x)\,\ddot{u}^t(x,t) \xrightarrow{(1)} f_I(x,t)=-m(x)\left[\ddot{u}(x,t)+\ddot{u}_g(t)\right] \quad (2)$$

اصل دالامبر ⟸

اصل تغییر مکان‌های مجازی ⟸ اگر سیستم در حال تعادل تحت تغییر مکان مجازی $\delta u(x)$ قرار گیرد، کار مجازی خارجی δW_E برابر کار مجازی داخلی δW_I می‌باشد.

$$\Rightarrow \delta W_E=\int_0^\ell f_I(x,t)\,\delta u(x)\,dx \overset{(2)}{=\!=}$$

$$-\int_0^\ell m(x)\,\ddot{u}(x,t)\,\delta u(x)\,dx-\ddot{u}_g(t)\int_0^\ell m(x)\,\delta u(x)\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} \delta W_I &= \int_0^{\ell} \underbrace{M(x,t)}_{\text{لنگر خمشی}}\ \underbrace{\delta k(x)}_{\text{جزء انحنای مجازی}}\, dx \\ M(x,t) &= EI(x)\ u''(x,t) \\ \delta k(x) &= \delta\left[u''(x)\right] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta W_I = \int_0^{\ell} EI(x)\, u''(x,t)\, \delta\left[u''(x)\right] dx$$

تغییرشکل مجازی سازگار با ψ انتخاب می‌شود که

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} u''(x,t) = \psi''(x)\, Z(t) \\ \ddot{u}(x,t) = \psi(x)\, \ddot{Z}(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta u(x) = \psi(x)\, \delta z \\ \delta\left[u''(x)\right] = \psi''(x)\, \delta z \end{cases}$$

جمع بندی

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta W_E = -\delta z\left[\ddot{z}\int_0^{\ell} m(x)\left[\psi(x)\right]^2 dx + \ddot{u}_g(t)\int_0^{\ell} m(x)\,\psi(x)\, dx\right] \\ \delta W_I = \delta z\left[z\int_0^{\ell} EI(x)\left[\psi''(x)\right]^2 dx\right] \end{cases}$$

شبیه معادله یک درجه آزادی که

$$\delta W_E = \delta W_I \Rightarrow \quad \delta z\left[\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{k}z + \tilde{L}\ddot{u}_g(t)\right] = 0 \xrightarrow{\delta z \neq 0} \boxed{\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{k}z + \tilde{L}\ddot{u}_g(t) = 0}$$

که در آن

$$\tilde{m} = \int_0^{\ell} m(x)\left[\psi(x)\right]^2 dx$$

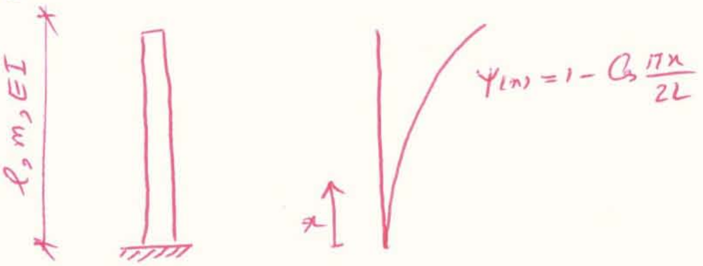
$$\tilde{k} = \int_0^{\ell} EI(x)\left[\psi''(x)\right]^2 dx$$

$$\tilde{L} = \int_0^{\ell} m(x)\,\psi(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{Z} + \omega_n^2 Z = -\tilde{\Gamma}\,\ddot{u}_g(t) \qquad \text{where} \quad \tilde{\Gamma} = \frac{\tilde{L}}{\tilde{m}}$$

$$\omega_n^2 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} = \frac{\int_0^{\ell} EI(x)\left[\psi''(x)\right]^2 dx}{\int_0^{\ell} m(x)\left[\psi(x)\right]^2 dx}$$

هرچه ψ دقیق‌تر باشد ω_n دقیق‌تر خواهد بود.



مثال: با فرض تابع شکل $\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$

معادله حرکت سیستم را تحت تحریک ارتعاش زمینه را بدست آورده و فرکانس طبیعی آنرا تعیین کنید.

$$\tilde{m} = m\int_0^l \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.227\ mL$$

$$\tilde{k} = EI\int_0^l \left(\frac{\pi^2}{4l^2}\right)^2 \cos^2\frac{\pi x}{2L}\, dx = 3.04\ \frac{EI}{l^3}$$

$$\tilde{L} = m\int_0^l \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) dx = 0.363\ ml$$

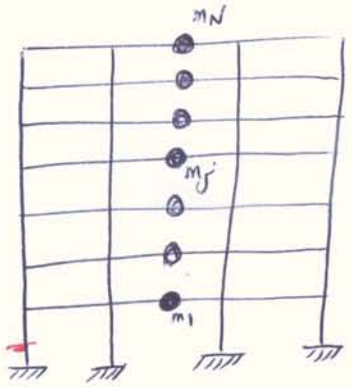
$$\omega_n = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \frac{3.66}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

درحدود ۴ درصد با فرکانس دقیق تفاوت دارد.

۵) قاب‌های برشی

N درجه آزادی دارد که

قاب‌ها را برشی گویند که در آن تیرهای طبقه صلب می‌باشند.



$$u_j(t) = \psi_j \, z(t) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$u_j^t(t) = u_j(t) + u_g(t)$$

به عنوان قبل می‌توان اثبات نمود که:

$$\tilde{m}\,\ddot{z} + \tilde{k}\,z = -\tilde{L}\,\ddot{u}_g(t)$$

جرم کلی $\tilde{m} = \sum_{j=1}^{N} m_j \psi_j^2$

سختی جانبی کلی $\tilde{k} = \sum_{j=1}^{N} k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2$

$k_j \rightarrow \sum_{\text{ستون‌های طبقه } j} \dfrac{12EI}{h^3}$

ضریب تحریک کلی $\tilde{L} = \sum_{j=1}^{N} m_j \psi_j$

روابط قبل را می‌توان به صورت ماتریسی نوشت چون

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_N \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}$$

بردار یکه

$$\tilde{m} = \underline{\psi}^T \underline{m}\, \underline{\psi} \quad , \quad \tilde{k} = \underline{\psi}^T \underline{k}\, \underline{\psi} \quad , \quad \tilde{L} = \underline{\psi}^T \underline{m}\, \underline{I}$$

نکته: اگر ساختمان برشی نباشد هم می‌توان از روابط ماتریسی فوق استفاده نمود.

$$\omega_n^2 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} = \frac{\sum_{j=1}^{N} k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2}{\sum_{j=1}^{N} m_j \psi_j^2} = \frac{\underline{\psi}^T \underline{k}\, \underline{\psi}}{\underline{\psi}^T \underline{m}\, \underline{\psi}}$$

نیروهای داخلی قاب برشی

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = -\tilde{\Gamma}\, \ddot{u}_g(t) \qquad \text{where} \quad \tilde{\Gamma} = \frac{\tilde{L}}{\tilde{m}}$$

با استفاده از طیف طرح :

حداکثر تغییر شکل $u_{j0} = \psi_j z_0 = \psi_j \tilde{\Gamma} \underbrace{D}_{\text{از طیف طرح}}$, $j = 1, 2, \dots, N$

نیروهای معادل $f_{j0} = \tilde{\Gamma} m_j \psi_j A$, $j = 1, 2, \dots, N$

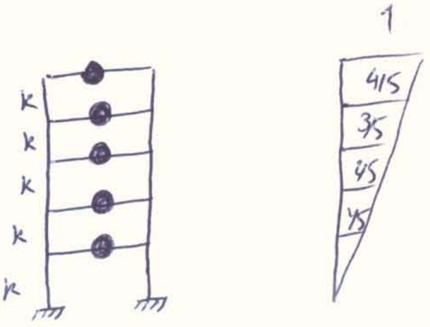
نیروهای ... $V_{i0} = \sum_{j=i}^{N} f_{j0}$

لنگر خمشی طبقه $M_{i0} = \sum_{j=i}^{N} (h_j - h_i) f_{j0}$ $\qquad h_i =$ ارتفاع کف i ام از پای ساختمان

برش پایه $V_{b0} = \sum_{j=1}^{N} f_{j0}$, لنگر پایه $M_{b0} = \sum_{j=1}^{N} h_j f_{j0}$

مثال 8.5

مثال 8.6 را مطالعه کنید.



ارتفاع طبقات یکسان و برابر h

$$\tilde{m} = \sum_{j=1}^{5} m_j \psi_j^2 = m \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5^2} = \frac{11}{5} m$$

$$\tilde{k} = \sum_{j=1}^{5} k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2 = k \frac{1^2+1^2+1^2+1^2+1^2}{5^2} = \frac{k}{5}$$

$$\tilde{L} = \sum_{j=1}^{5} m_j \psi_j = m \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3m$$

$$\tilde{\Gamma} = \frac{15}{11} \Rightarrow \ddot{z} + \omega_n^2 z = -\frac{15}{11} \ddot{u}_g(t)$$

که z تغییر مکان جانبی در تراز بام می‌باشد (منظور $\psi_j = 1$)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k/5}{11m/5}} = 0.302 \sqrt{k/m}$$

مقدار ω_n در حدود 6 درصد بزرگتر از مقدار دقیق است.

۵۸

Rayleigh's Method, 1873

روش رایلی

این روش بر پایه اصل بقای انرژی است و می‌تواند شامل گردد.

۱- سیستم جرم و فنر $\qquad \omega_n = \sqrt{K/m}$

۲- سیستم با صلبیت و جرم گسترده

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^l EI(x)\,[\psi''(x)]^2\,dx}{\int_0^l m(x)\,[\psi(x)]^2\,dx}$$

۳- سیستم با جرم‌های متمرکز (قاب برشی)

$$\omega_n^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N} k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2}{\sum_{j=1}^{N} m_j \psi_j^2} = \frac{\underline{\psi}^T \underline{k}\, \underline{\psi}}{\underline{\psi}^T \underline{m}\, \underline{\psi}}$$

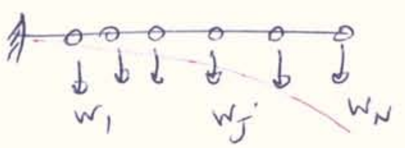
اصطلاحاً به آن خارج قسمت رایلی هم می‌گویند.

* فرکانس تقریبی حاصل از روش رایلی (با ψ فرضی) همواره بزرگتر از فرکانس طبیعی اصلی (کوچکترین فرکانس ارتعاش) است.

* خارج قسمت رایلی (حتی در صورت انتخاب یک ψ نامناسب) تخمین بسیار خوبی از فرکانس اصلی ارتعاش بدست می‌دهد.

* انتخاب تابع ψ، دقت روش را مشخص می‌کند.

ψ انتخابی مناسب = تغییر شکل سازه تحت نیروهای ثقلی که بصورت جانبی وارد می‌شوند است.

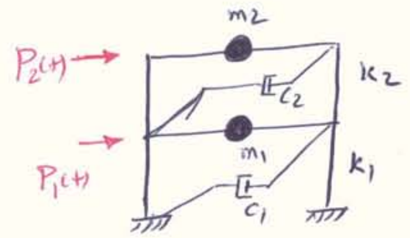


Multi-Degree-of-freedom (MDOF)

سیستم‌های چند درجه آزادی

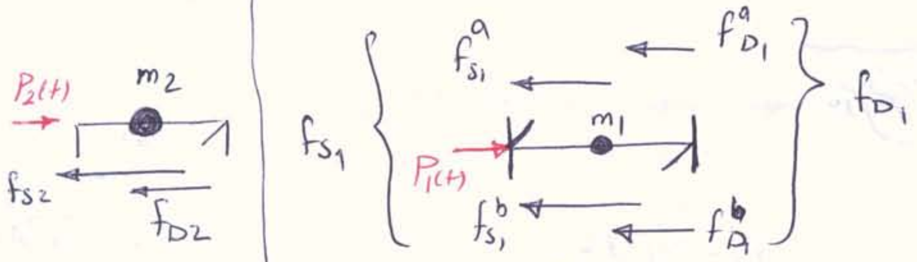
از قاب برشی دو طبقه شروع می‌کنیم

- تیرها صلب است
- از تغییر شکل محوری تیرها و ستون‌ها صرف نظر شده است.
- از اثر نیروی محوری در سختی ستون‌ها صرف نظر شده است.



تعداد تغییر مکان‌های مستقل لازم برای توصیف وضعیت تغییر شکل یافته جرم‌ها نسبت به وضعیت اولیه‌شان، تعداد درجات آزادی (دینامیکی) نامیده می‌شود.

نوشتن معادلات تعادل دینامیکی



$$m_1\ddot{u}_1 + f_{D_1} + f_{S_1} = P_1(t)$$

$$m_2\ddot{u}_2 + f_{D_2} + f_{S_2} = P_2(t)$$

به شکل ماتریسی $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{D_1} \\ f_{D_2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{S_1} \\ f_{S_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

or

$$\boxed{\underline{m}\,\underline{\ddot{u}} + \underline{f_D} + \underline{f_S} = \underline{P(t)}}$$

$$V_j = k_j \Delta_j \rightarrow u_j - u_{j-1} =$$ تغییرمکان بین طبقه j ام

نیروی برشی طبقه j ام

$$k_j = \left[\frac{12EI_c}{h^3} \right.$$ سختی طبقه

$$f_{S_2} = k_2(u_2 - u_1)$$

$$\Rightarrow f_{S_1}^a = - f_{S_2} = k_2(u_1 - u_2)$$

$$\Rightarrow f_{S_1} = \underbrace{f_{S_1}^b}_{\text{طبقه اول}} + \underbrace{f_{S_1}^a}_{\text{طبقه دوم}} = k_1 u_1 + k_2(u_1 - u_2)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} f_{S_1} \\ f_{S_2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سختی قاب دو طبقه}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی قاب دو طبقه ⟷ از تحلیل ماتریسی هم قابل حصول است

به همین ترتیب :

$$V_j = c_j \dot{\Delta}_j$$

$$\Rightarrow f_{D_2} = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

$$\Rightarrow f_{D_1} = c_1 \dot{u}_1 + c_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} f_{D_1} \\ f_{D_2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس میرایی}} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{m}\ddot{\underline{u}} + \underline{c}\dot{\underline{u}} + \underline{k}\underline{u} = P(t) \longrightarrow$$ شامل دو معادله دیفرانسیل حرکت است که هرکدام شامل u_1 و هم u_2 می‌باشند!

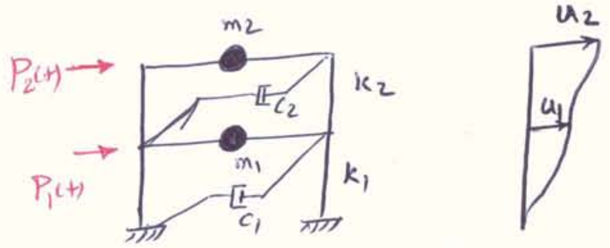
So it is a Coupled. Equation.

Multi-Degree-of-Freedom (MDOF)

سیستم های چند درجه آزادی

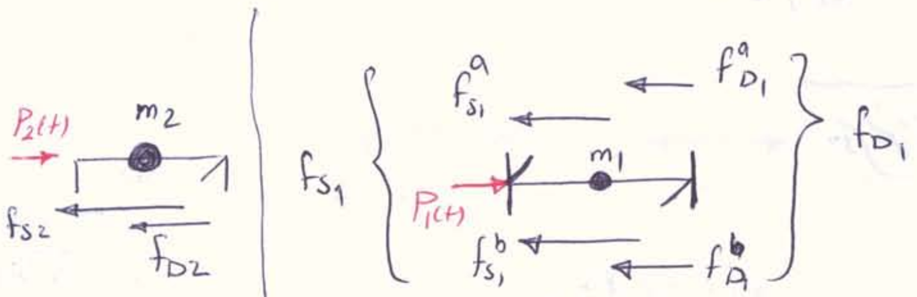
از قاب برشی دو طبقه شروع می‌کنیم

- تیرها صلب است
- از تغییر شکل محوری تیرها و ستونها صرف نظر شده است.
- از اثر نیروی محوری در سختی ستونها صرف نظر شده است.



تعداد تغییر مکانهای مستقل لازم برای توصیف وضعیت تغییر شکل یافته جرم ها نسبت به وضعیت اولیه شان را تعداد درجات آزادی (دینامیکی) نامیده می شود.

نوشتن معادلات تعادل دینامیکی



$$m_1\ddot{u}_1 + f_{D_1} + f_{s_1} = P_1(t)$$

$$m_2\ddot{u}_2 + f_{D_2} + f_{s_2} = P_2(t)$$

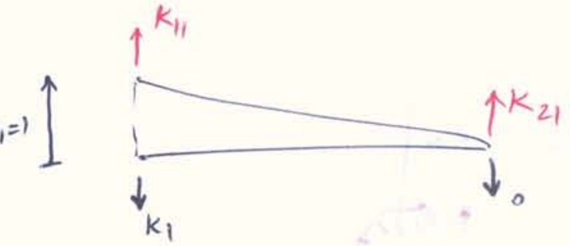
بشکل ماتریسی $\Rightarrow$

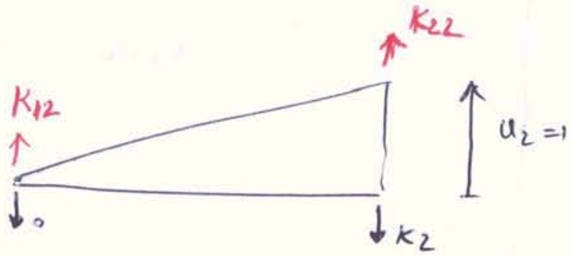
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{D_1} \\ f_{D_2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{s_1} \\ f_{s_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

or

$$\boxed{\underline{m}\,\underline{\ddot{u}} + \underline{f_D} + \underline{f_s} = \underline{P(t)}}$$

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$





$u_1 = 1 \,,\; u_2 = 0$

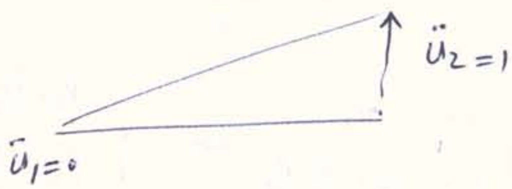
$u_1 = 0 \,,\; u_2 = 1$

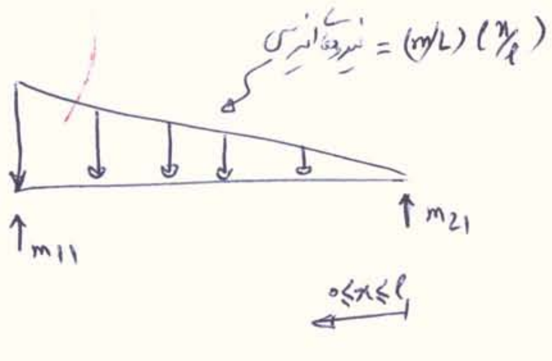
$$\Rightarrow k = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

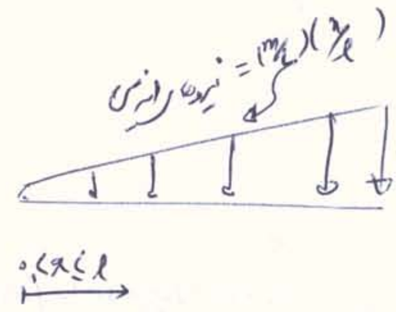
گام ۴ - تعیین ماتریس جرم :

همانند ماتریس سختی در اینجا داریم :

$m_{ij} =$ نیرو در درجه آزادی i لازم برای ایجاد شتاب واحد در درجه آزادی j، در حالی که لازم باشد که شتاب در درجات آزادی دیگر صفر باشد.







$m_{22} = m/3$

$m_{12} = m/6$

$m_{11} = m/3$

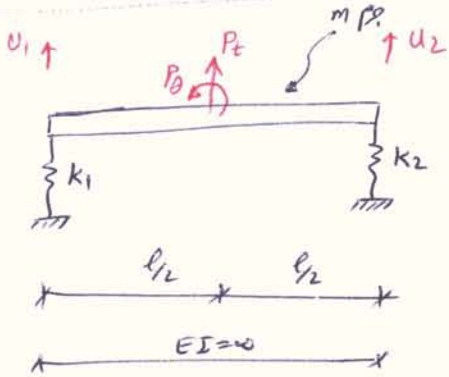
$m_{21} = m/6$

برای قاب n طبقه

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & & \\ & k_2+k_3 & -k_3 & & & \\ & & k_3+k_4 & -k_4 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & k_{N-1}+k_N & -k_N \\ & & & & & k_N \end{bmatrix}$$

Ex. 9.2

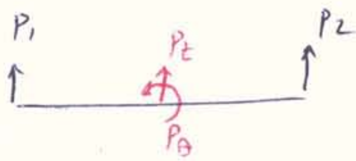
معادله حرکت سازه ذیل را ایده‌آل سازی نمایید.



گام ۱- تشخیص درجات آزادی دینامیکی :

می‌توان با u_1 و u_2 حرکت جسم صلب را مشخص نمود.

گام ۲- نیروها باید در جهت درجات آزادی دینامیکی اعمال گردند.



$$\begin{cases} P_1+P_2 = P_t \\ P_2\,l = P_\theta + P_t\,l/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = P_t/2 - P_\theta/l \\ P_2 = \dfrac{P_\theta}{l} + P_t/2 \end{cases}$$

گام ۳: تعیین ماتریس سختی

از تعریف ماتریس‌ها داریم که

k_{ij} = نیروی درجه آزادی i ام به ازای تغییر مکان واحد در درجه آزادی j ام وقتی که بقیه درجات آزادی بسته باشند.

$$m\ddot{u} + ku = P(t)$$

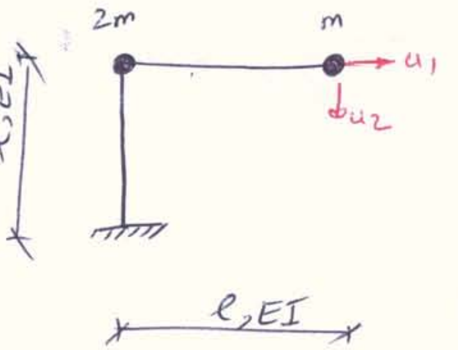
$$\Rightarrow \frac{m}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_t/2 - P_\theta/\ell \\ P_t/2 + P_\theta/\ell \end{bmatrix}$$

the equation of motion is coupled!

مثال 9.3 و 9.4 و 9.5 مطالعه شود.

Ex. 9.6

معادله ارتعاش را برای سازه روبرو بدست آورید. (از تغییر شکل محوری اعضا صرفنظر گردد) و قاب بدون جرم فرض می گردد



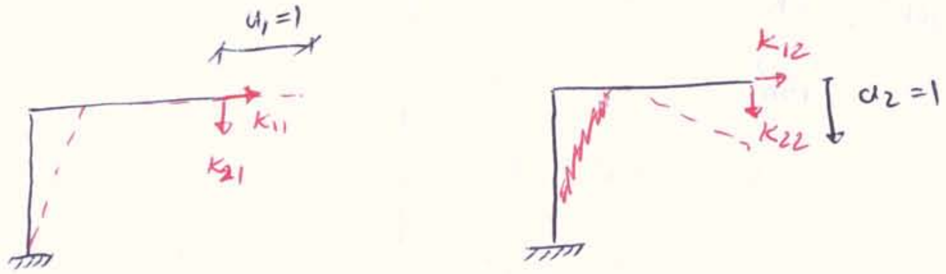
تشکیل ماتریس جرم :

- اگر شتاب $\ddot{u}_1 = 1$ به سازه داده شود هر دو جرم شتاب می گیرند (چون میله در جهت محور صلب است) پس $2m+m = 3m$

- " " $\ddot{u}_2 = 1$ آنگاه داریم : m

$$m = \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

تشکیل ماتریس سختی :



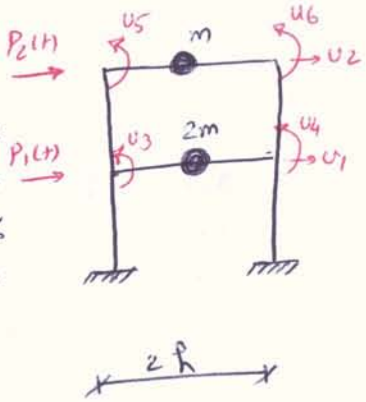
$$k = \frac{6EI}{7\ell^3}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

پس معادله حرکت ارتعاش آزاد نامیرا بصورت ذیل است :

$$\begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{6EI}{7\ell^3}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

از تغییر شکل محوری تیرها و ستونها صرفنظر کنید :

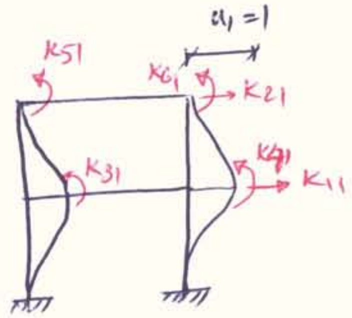
Ex. 9.7.



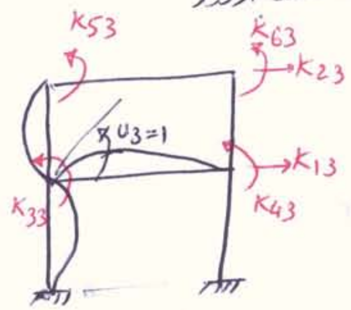
} EI تیر و ستونها

} 2EI تیر و ستون

۶ درجه آزادی < ۲ درجه انتقالی / ۴ درجه دورانی



or



در واقع ۶ بار باید تحلیل شود تا ماتریس سختی محاسبه گردد.

$$k = \frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix} 72 & -24 & 6h & 6h & -6h & -6h \\ & 24 & 6h & 6h & 6h & 6h \\ & & 16h^2 & 2h^2 & 2h^2 & 0 \\ & & & 16h^2 & 0 & 2h^2 \\ & \text{Sym} & & 0 & 6h^2 & h^2 \\ & & & & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}$$

اگر تغییر شکل‌ها فقط u_1 و u_2 را می‌خواستیم (قاب برشی) ← آنگاه فقط سطر اول و دوم از ماتریس فوق باقی می‌ماند.

$$m = m \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

معادلات ارتعاش بصورت ذیل است:

$$m\ddot{u} + ku = p(t)$$

- بازهم معادلات درگیر هستند
- و همچنین در ماتریس جرم کلی صفر وجود دارد!

Static Condensation

تراکم استاتیکی

گاهی در ماتریس جرم عناصر صفر می‌شوند یعنی اینکه در جهت درجه آزادی متناظر جرم نداریم.

مثلاً در مثال قبل در جهت دورانی، جرم دورانی مربوطه صفر بوده‌اند.

حال اگر در این حالت تحریک دینامیکی هم نداشته باشیم (مثل زلزله)، آنگاه می‌توانیم از تراکم استاتیکی استفاده کنیم.

باقیمانده درجات آزادی (دینامیکی)

$$\begin{bmatrix} m_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_t \\ \ddot{u}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{tt} & k_{to} \\ k_{ot} & k_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ u_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_t(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

درجات آزادی بدون جرم (تراکم شده)

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{tt}\ddot{u}_t + k_{tt} u_t + k_{to} u_o = p_t(t) \\ k_{ot} u_t + k_{oo} u_o = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_o = -k_{oo}^{-1} k_{ot} u_t \end{cases}$$

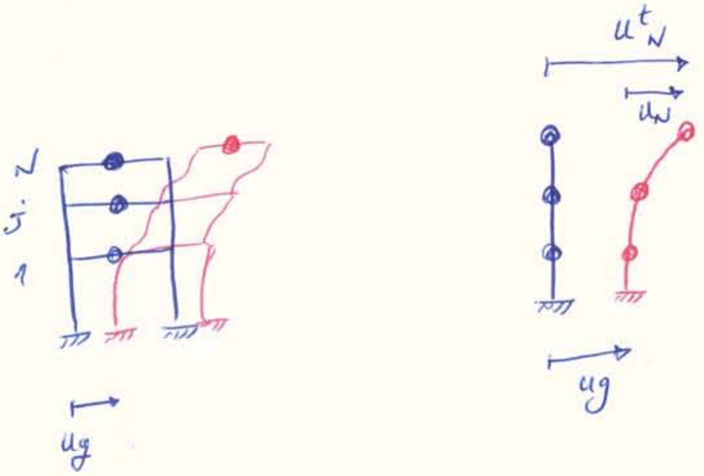
جایگذاری $\Rightarrow$ $\cancel{m_{tt}\ddot{u}_t + k_{tt}}$

$$m_{tt}\ddot{u}_t + \underbrace{(k_{tt} - k_{ot}^T k_{oo}^{-1} k_{ot})}_{\hat{k}_{tt}} u_t = p_t(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{m_{tt}\ddot{u}_t + \hat{k}_{tt} u_t = p_t(t)} \xrightarrow{\text{حل}} u_t(t) \quad \text{بدست می‌آید} \longrightarrow u_o(t) \ \text{بدست می‌آید}$$

مثال 9.8 و 9.9 را بخوانید.

قاب دوبعدی - ارتعاش اتفاقی زمینه



برای هر طبقه $\Rightarrow u_j^t(t) = u_j(t) + u_g(t) \xRightarrow{\text{برای N جرم}} u^t(t) = u(t) + u_g(t)\,\mathbf{1}$ → بردار یکه با مرتبه N (که تمامی عناصر آن واحد می‌باشند)

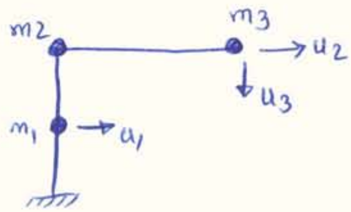
از تعادل دینامیکی $\Rightarrow f_I + f_D + f_S = 0 \Rightarrow m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\mathbf{1}\ddot{u}_g(t)$

$f_I = m\ddot{u}^t$

* N معادله دیفرانسیل ارتعاش برای محاسبه $u_j(t)$ ها و مشتقات آن
* ماتریس k از تراکم استاتیکی بدست آمده تا درجات آزادی قائم و دورانی حذف شود.
* بیانگر آنست که زلزله مثل تحریک نیروی خارجی $-m_j\ddot{u}_g(t)$ در درجه آزادی j می‌باشد)

$$\Rightarrow P_{eff}(t) = -m\mathbf{1}\ddot{u}_g(t)$$

سازه وقتی تمام درجات آزادی در امتداد حرکت زمین نباشند



$$m = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2+m_3 & \\ & & m_3 \end{bmatrix}$$

جمله اول از معادله تعادل دینامیکی $= \underline{m}\,\underline{\ddot{u}}^t = \underline{m}(\underline{\ddot{u}} + \underline{\ddot{u}_g}) = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2+m_3 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 + \ddot{u}_g \\ \ddot{u}_2 + \ddot{u}_g \\ \ddot{u}_3 + 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P_{eff} = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2+m_3 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\ddot{u}_g \\ -\ddot{u}_g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2+m_3 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} (-\ddot{u}_g) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

که

بردار تاثیر – بعبارت دیگر درجه آزادی سوم در امتداد تحریک زلزله نیست، پس در بردار تاثیر درایه صفر پدیدار شده است.

$$= \begin{bmatrix} -m_1 \ddot{u}_g(t) \\ -(m_2+m_3)\ddot{u}_g(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

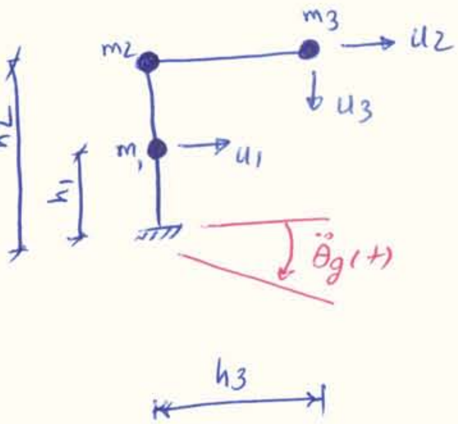
نکته:

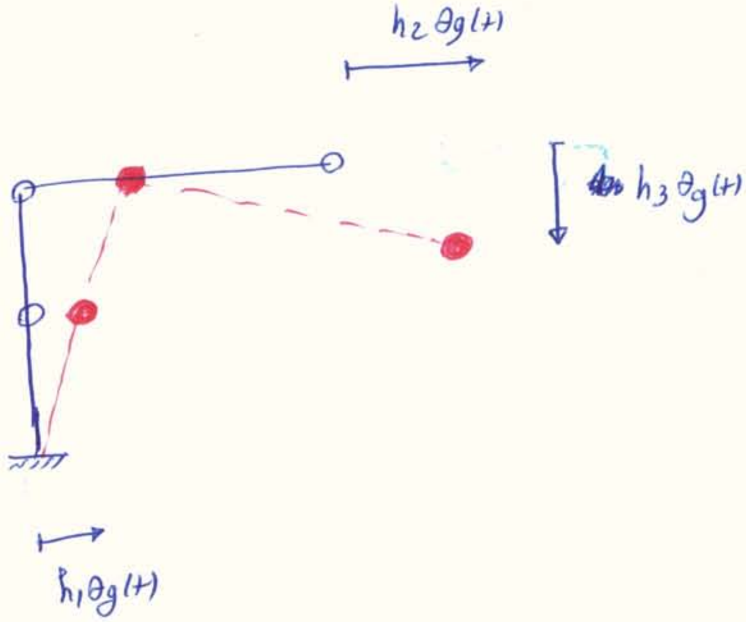
$m_{12} = 0 \quad =$ نیرو در 1 بازاء شتاب واحد در ۲

وقتی تمام درجات آزادی بجز ۲ بسته باشند.

* حرکت دورانی زمین

- معمولاً حرکت دورانی زمین اندازه‌گیری نمی‌شود





جمله اول تعادل دینامیکی

$$= \underline{m}\,\underline{\ddot{u}}^t = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2+m_3 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 + h_1 \ddot{\theta}_g(t) \\ \ddot{u}_2 + h_2 \ddot{\theta}_g(t) \\ \ddot{u}_3 + h_3 \ddot{\theta}_g(t) \end{bmatrix}$$

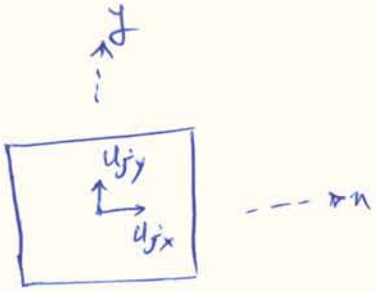
که شامل تغییر شکل سازه در U

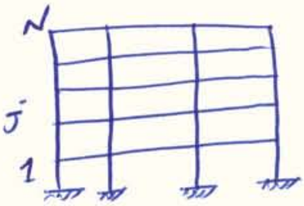
به علت دوران زمین (سازه صلب باشد)

$$\Rightarrow P_{eff} = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2+m_3 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \cdot \left[-\ddot{\theta}_g(t)\right] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 h_1 \ddot{\theta}_g(t) \\ -(m_2+m_3) h_2 \ddot{\theta}_g(t) \\ -m_3 h_3 \ddot{\theta}_g(t) \end{bmatrix}$$

ساختمان های متقارن در پلان _ حرکت انتقالی زمین

ساختمان N طبقه دارای کف های صلب و متقارن در پلان





* می توان ساختمان را در دو امتداد متعامد بصورت مستقل آنالیز نمود.

مثلا : برای قاب ها در راستای x ←

$$f_{s_i} = k_{x_i} u_{x_i}$$

نیروهای جانبی

تغییر مکان های جانبی

چون سقف صلب است، تمامی قاب ها (در جهت x) تغییر مکان یکسانی را تحمل می کنند.

$$u_{x_i} = u_x$$

برای طبقه

$$\left\{\begin{array}{l} f_{s_1} = k_{x_1} u_x \\ f_{s_2} = k_{x_2} u_x \\ \vdots \\ f_{s_N} = k_{x_N} u_x \end{array}\right. \Rightarrow \sum f_{s_i} = \sum k_{x_i} u_x \Rightarrow \boxed{f_s = k_x u_x}$$

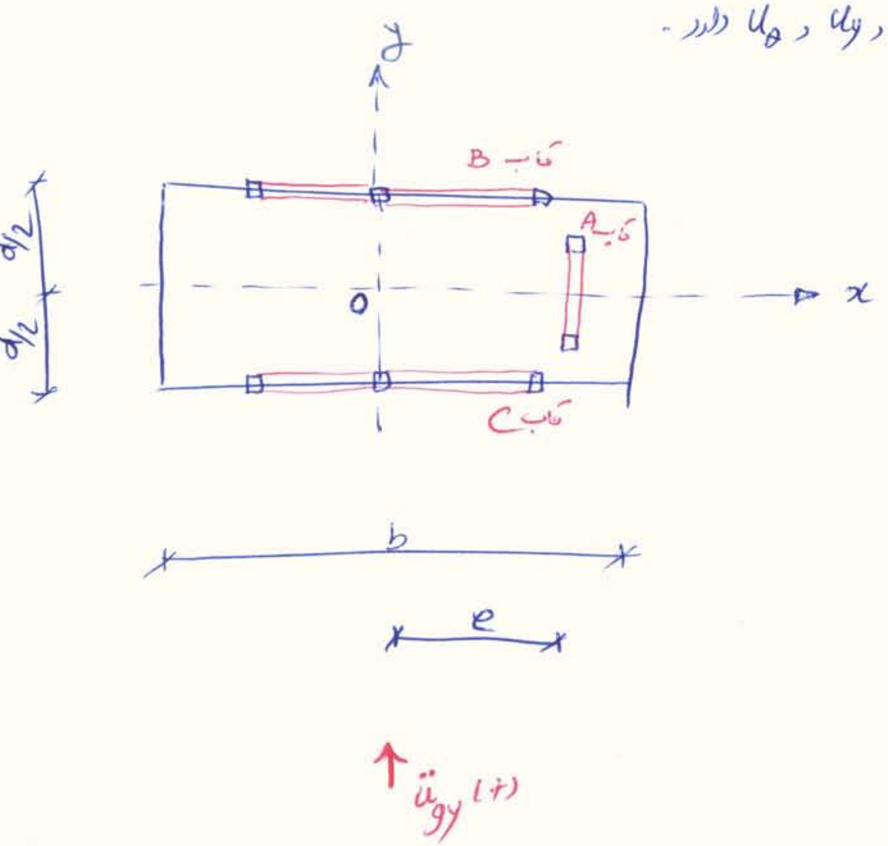
نیروهای جانبی معادل در تراز کف های ساختمان

ماتریس سختی جانبی کلی ساختمان

ساختمان با پلان نامتقارن

* در این حالت که اگر تحریک زلزله در یک جهت داشته باشیم، در دو جهت x و y و چرخش θ تغییر شکل به وجود می‌آید.

* ساختمان یک طبقه است و ۳ درجه آزادی u_x و u_y و u_θ دارد.



$$\begin{bmatrix} f_{Sx} \\ f_{Sy} \\ f_{S\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\theta} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\theta} \\ k_{\theta x} & k_{\theta y} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \underline{f_S} = \underline{k}\,\underline{u}$$

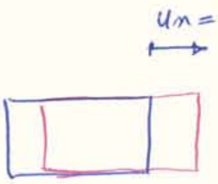
فرض کنید سختی قاب‌ها برابر $\underbrace{k_y ،\ k_{xB} ،\ k_{xC}}$ باشند:

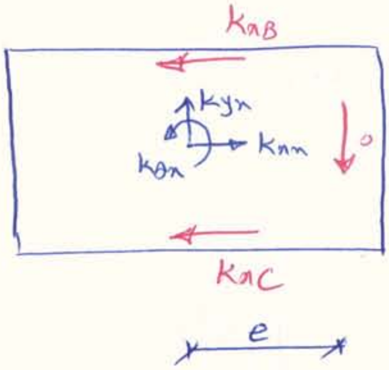
با استفاده از روش تراکم استاتیکی قابل حصول است.

$$\begin{cases} f_{SA} = k_y\, u_A \\ f_{SB} = k_{xB}\, u_B \\ f_{SC} = k_{xC}\, u_C \end{cases}$$

تعیین ماتریس سختی

a) $u_x=1$, $u_y=0$, $u_\theta=0$





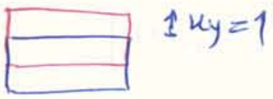
تعادل ⇒

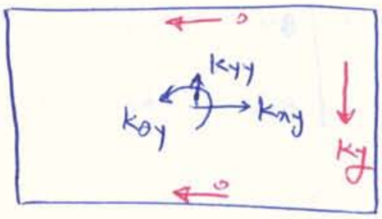
$$k_{xx}=k_{xB}+k_{xC}$$

$$k_{yx}=0$$

$$k_{\theta x}=\frac{d}{2}(k_{xC}-k_{xB})$$

b) $u_x=0$, $u_y=1$, $u_\theta=0$



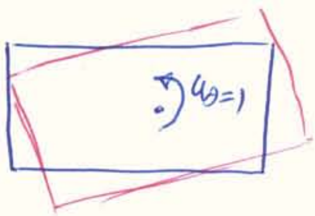


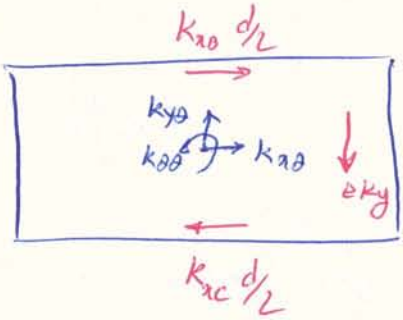
$$k_{xy}=0$$

$$k_{yy}=k_y$$

$$k_{\theta y}=e k_y$$

c) $u_x=u_y=0$, $u_\theta=1$





$$k_{x\theta}=\frac{d}{2}(k_{xC}-k_{xB})$$

$$k_{y\theta}=e k_y$$

$$k_{\theta\theta}=e^2 k_y+\left(\frac{d^2}{4}\right)(k_{xB}+k_{xC})$$

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} K_{xB}+K_{xC} & 0 & \frac{d}{2}(K_{xC}-K_{xB}) \\ 0 & K_y & eK_y \\ \frac{d}{2}(K_{xC}-K_{xB}) & eK_y & e^2K_y+\frac{d^2}{4}(K_{xB}+K_{xC}) \end{bmatrix}$$

۱) نیروی اینرسی

$$\underline{f_I} = \begin{Bmatrix} f_{Ix} \\ f_{Iy} \\ f_{I\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & I_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x^t \\ \ddot{u}_y^t \\ \ddot{u}_\theta^t \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & K_{x\theta} \\ 0 & K_{yy} & K_{y\theta} \\ K_{\theta x} & K_{\theta y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m\ddot{u}_{gx}(t) \\ m\ddot{u}_{gy}(t) \\ I_0\ddot{u}_{g\theta}(t) \end{bmatrix}$$

نکته: اگر فقط یکی از حرکات زلزله را داشته باشیم، مثلاً $\ddot{u}_{gx}(t)$، آنگاه معادله دیفرانسیل دوم و سوم نیز جواب غیر صفر خواهند داشت که علت آن عدم تقارن در سازه است.

حالت خاص: $(e=0)$ $(K_B=K_C)$

$$\begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d^2}{2}K_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m\ddot{u}_{gx}(t) \\ m\ddot{u}_{gy}(t) \\ I_0\ddot{u}_{g\theta}(t) \end{Bmatrix}$$

جالب اینجاست که سه معادله غیر همبسته هستند، یعنی مستقل از یکدیگرند. یعنی اینکه:

۱- حرکت زمین در امتداد x فقط باعث تغییر مکان در جهت x می‌گردد که از حل معادله دیفرانسیل اول بدست می‌آید.

۲- 〃 〃 〃 y 〃 〃 〃 〃 y 〃 〃 〃 (دوم) 〃 〃 〃 .

۳- سیستم هیچگونه حرکت پیچشی نخواهد داشت مگر اینکه حرکت دورانی زمین حادث گردد.

حل معادلات حرکت سیستم MDOF

معادلات ارتعاش آزاد سیستم MDOF بصورت ذیل است :

$m\ddot{u}+ku=0$, $u=u(0)$, $\dot{u}=\dot{u}(0)$

تابع زمان — تابع شکل

$u(t)=q_n(t)\,\phi_n$

فرض کنیم $q_n(t)=A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t$

$\Rightarrow u(t)=\phi_n\left(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t\right)$

$\Rightarrow$ u(t) باید در معادله دیفرانسیل حرکت صدق کند. $\Rightarrow \left[-\omega_n^2 m\phi_n+k\phi_n\right]q_n(t)=0 \xrightarrow{\text{چون } q_n(t)\neq 0}$

در سیستم که جواب $u(t)=0$ بدیهی است یعنی ارتعاش صورت نگیرد.

$k\phi_n=\omega_n^2 m\phi_n$ ← Matrix eigenvalue Problem

مسئله مقدار ویژه ماتریسی

k و m معلوم هستند و ω_n^2 و ϕ_n مجهول هستند.

(اسکالر) (بردار)

$\Rightarrow \left[k-\omega_n^2 m\right]\phi_n=0$ → N معادله جبری است

این N معادله وقتی جواب دارد که در ذیل شرح داده می‌شود.

$\Rightarrow \det\left[\underline{k} - \omega_n^2 \underline{m}\right] = 0 \xRightarrow{\text{بسط}}$ یک چندجمله‌ای از درجه N برحسب ω_n^2 بدست می‌آید.

معادله مشخصه (فرکانس)

کوچکترین فرکانس

بزرگترین پریود

$$\begin{array}{ccccc} \omega_1 & \rightarrow & T_1 & \rightarrow & \phi_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \omega_n & \rightarrow & T_n & \rightarrow & \phi_n \end{array}$$

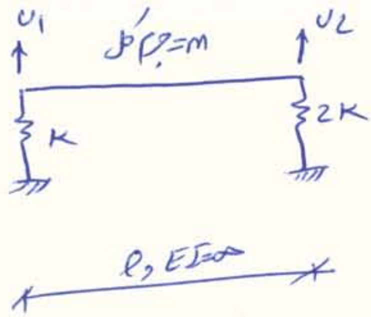
$\Rightarrow$ N ریشه حقیقی و مثبت برای ω_n^2 دارد. $\Rightarrow$

چون $\underline{m}$ و $\underline{k}$ متقارن و مثبت معین‌اند
(اگر که تراکم استاتیکی انجام شده باشد، $\underline{m}$ مثبت معین خواهد بود)

ϕ ها نرمال هستند

به طور خلاصه هر سیستم N درجه آزاد دارای N فرکانس ارتعاش طبیعی می‌باشد.

Ex 10.1



$$\underline{m} = \frac{m}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{k} = k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{k} - \omega_n^2\,\underline{m} = \begin{bmatrix} k - \frac{m\omega_n^2}{3} & -\frac{m\omega_n^2}{6} \\ -m\frac{\omega_n^2}{6} & 2k - \frac{m\omega_n^2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det[\underline{k} - \omega_n^2\underline{m}] = 0 \Rightarrow m^2\omega_n^4 - 12km\omega_n^2 + 24k^2 = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = 2.536\,\frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 9.464\,\frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 1.592\sqrt{k/m} \Rightarrow T_1 = 2\pi/\omega_1 = 3.946\sqrt{\frac{m}{k}} \\ \omega_2 = 3.076\sqrt{k/m} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2.042\sqrt{m/k} \end{cases}$$

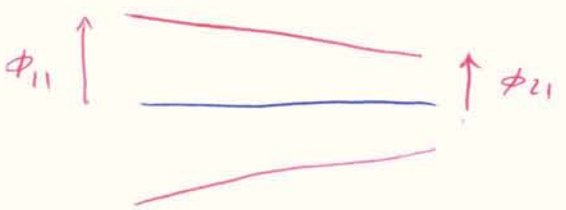
$$[\underline{k} - \omega_n^2\underline{m}]\{\phi_n\} = \underline{0} \xrightarrow[\omega_1]{\text{for}} k\begin{bmatrix} 0.155 & -0.423 \\ -0.423 & 1.165 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{if } \phi_{11} = 1 \Rightarrow \phi_{21} = 0.366 \Rightarrow \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.366 \end{Bmatrix}$$

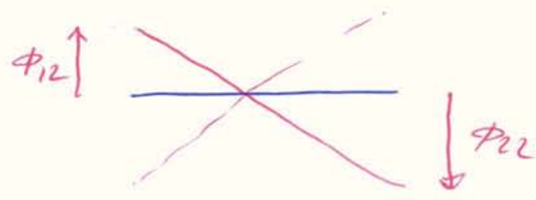
$$[\underline{k} - \omega_n^2\underline{m}]\{\phi_n\} = \underline{0} \xrightarrow[\omega_2]{\text{for}} k\begin{bmatrix} -2.155 & -1.577 \\ -1.577 & -1.155 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{if } \phi_{12} = 1 \Rightarrow \phi_{22} = -1.366 \Rightarrow \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.366 \end{Bmatrix}$$

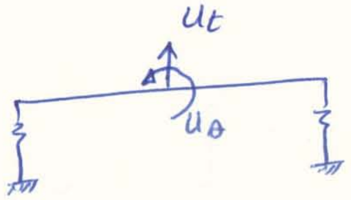
مود اول



مود دوم



نکته جالب



اگر از سیستم درجات آزادی دو بعدی

هم استفاده کردی بازهم به ω_1 و ω_2 قبلی می‌رسیم!

تعامد مودها

$$\underline{k}\,\underline{\phi}_n = \omega_n^2\,\underline{m}\,\underline{\phi}_n \xrightarrow[\phi_r^T]{\text{پیش ضرب در}} \underline{\phi}_r^T\,\underline{k}\,\underline{\phi}_n = \omega_n^2\,\underline{\phi}_r^T\,\underline{m}\,\underline{\phi}_n \quad (1)$$

$$\underline{k}\,\underline{\phi}_r = \omega_r^2\,\underline{m}\,\underline{\phi}_r \xrightarrow[\phi_n^T]{\text{پیش ضرب در}} \underline{\phi}_n^T\,\underline{k}\,\underline{\phi}_r = \omega_r^2\,\underline{\phi}_n^T\,\underline{m}\,\underline{\phi}_r \quad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{\text{ترانسپوز}} \underline{\phi}_n^T\,\underline{k}\,\underline{\phi}_r = \omega_n^2\,\underline{\phi}_n^T\,\underline{m}\,\underline{\phi}_r \xrightarrow[(2)]{\text{مساوی قرار دادن}} (\omega_n^2-\omega_r^2)\,\underline{\phi}_n^T\,\underline{m}\,\underline{\phi}_r = 0$$

$$\text{if } \omega_n \neq \omega_r \Longrightarrow \underline{\phi}_n^T\,\underline{m}\,\underline{\phi}_r = 0$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که

$$\underline{\phi}_n^T\,\underline{k}\,\underline{\phi}_r = 0$$

<u>در مثال حل شده قبل :</u>

$$\phi_1^T\,m\,\phi_2 = 0$$

$$\langle 1 \quad 0.366 \rangle \frac{m}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1.366 \end{Bmatrix} = \cancel{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}\ 0$$

تعامد فوق ایجاب می‌کند که ماتریس‌های زیر قطری باشند.

$$\underline{K} = \Phi^T k\,\Phi$$

$$\underline{M} = \Phi^T m\,\Phi$$

که در آن عناصر قطری برابرند با

$$K_n = \phi_n^T k\,\phi_n$$

$$M_n = \phi_n^T m\,\phi_n$$

چون m و k متقارن معین مثبت هستند، عناصر قطری M و K نیز مثبت خواهند بود

$$K_n = \phi_n^T(\omega_n^2 m\,\phi_n) = \omega_n^2(\phi_n^T m\,\phi_n) = \omega_n^2 M_n$$

$$\Phi = [\phi_{ij}] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \phi_1 & \phi_2 & & \phi_n \end{array} \end{array}$$

ماتریس مود

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس طیفی

برای هر بردار ویژه + هر مقدار ویژه $\Rightarrow k\phi_n = m\phi_n\omega_n^2 \xrightarrow{\text{در شکل ماتریسی}} k\Phi = m\Phi\Omega^2$

تعامد مودها

کار انجام شده توسط نیروهای اینرسی مود n ام به علت تغییر شکل‌های مود r ام مساوی صفر است.

اثبات: سازه‌ای را در نظر بگیرید که در مود n ام با تغییر شکل‌های زیر در حال ارتعاش است:

$$\begin{cases} u_n(t) = q_n(t)\,\phi_n \Rightarrow \ddot{u}_n(t) = \ddot{q}_n(t)\,\phi_n \Rightarrow (f_I)_n = -m\ddot{u}_n(t) = -m\phi_n\ddot{q}_n(t) \\ u_r(t) = q_r(t)\,\phi_r \end{cases}$$

کار انجام شده نیروهای اینرسی مود n ام
تحت تغییر شکل‌های مود r ام

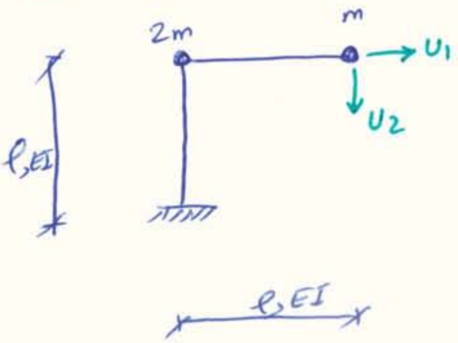
$$= (f_I)_n^T u_r = -(\phi_n^T m \phi_r)\,\ddot{q}_n(t)\,q_r(t) = 0$$

همچنین می‌توان اثبات نمود که

کار انجام شده توسط نیروهای استاتیکی (معادل) نظیر تغییر شکل‌های مود n ام به علت تغییر شکل‌های مود r ام مساوی صفر است.

Ex 10.3

مطالعه شود Ex 10.2

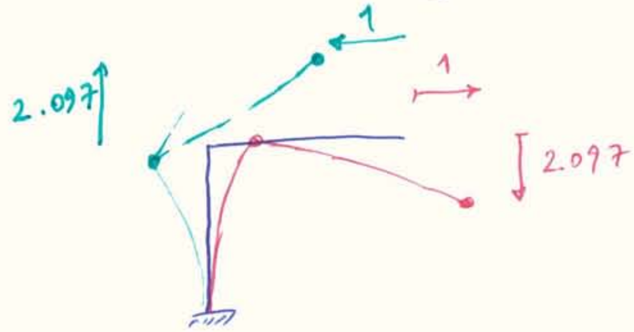


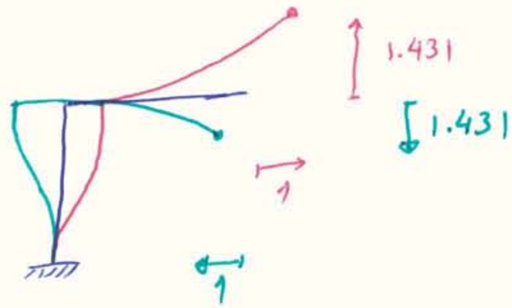
از قبل داشتیم:

$$m = \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad , \quad k = \frac{6EI}{7l^3}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det\left[k - \omega_n^2 m\right] = 0 \xrightarrow{\lambda = \frac{7ml^3}{6EI}\omega^2} 3\lambda^2 - 14\lambda + 7 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0.5695 \\ \lambda_2 = 4.0972 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0.6987\sqrt{\dfrac{EI}{ml^3}} \\ \omega_2 = 1.874\sqrt{\dfrac{EI}{ml^3}} \end{cases} \Rightarrow \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.097 \end{Bmatrix} \quad , \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.431 \end{Bmatrix}$$

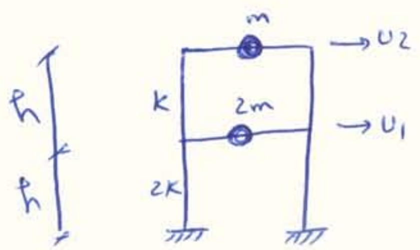


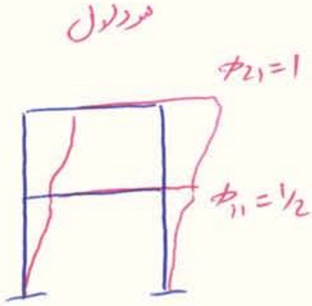


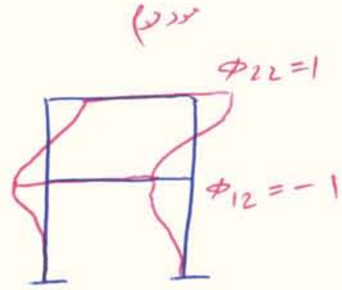
"مود اول ارتعاش"

"مود دوم ارتعاش"

Ex 10.4







$$m=\begin{bmatrix}2m & \\ & m\end{bmatrix}, \quad k=\begin{bmatrix}3k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}$$

$$\det\left[\underline{k}-\omega_n^2\underline{m}\right]=0 \Rightarrow (2m^2)\omega^4-5km\omega^2+2k^2=0 \Rightarrow \begin{cases}\omega_1=\sqrt{\frac{k}{2m}}\\ \omega_2=\sqrt{\frac{2k}{m}}\end{cases}, \quad k=\frac{24EI_c}{h^3}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1=3.464\sqrt{\frac{EI_c}{mh^3}} \qquad \Rightarrow \phi_1=\begin{Bmatrix}0.5\\1\end{Bmatrix}, \quad \phi_2=\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}$$

$$\omega_2=6.928\sqrt{\frac{EI_c}{mh^3}}$$

نکته: برای اینکه φها هم پایه شوند می‌توان (اختیاری است) صورت آتی نرمال کرد که

$$M_n=\phi_n^T m\,\phi_n=1$$

شود.

مثلاً برای:

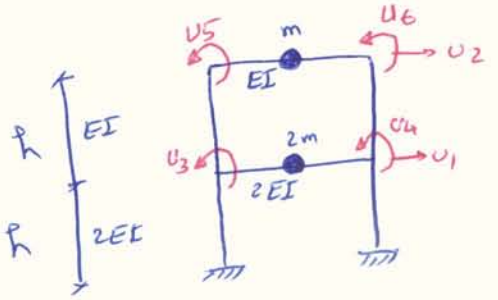
$$M_1=\phi_1^T m\,\phi_1=m\left\langle \tfrac{1}{2} \quad 1\right\rangle\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.5\\1\end{Bmatrix}=\tfrac{3}{2}m$$

پس برای اینکه M_1 واحد شود باید بردار ϕ_1 بر $\sqrt{\frac{3m}{2}}$ تقسیم گردد.

$$\phi_1=\frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}$$

شکل هم پایه شده ϕ_1

Ex 10.5



$h = 3\ \text{meter}$

Static Condensation $\Rightarrow \quad m_{tt} = m\begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{k}_{tt} = \dfrac{EI}{h^3}\begin{bmatrix} 54.88 & -17.51 \\ -17.51 & 11.61 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det\left[\hat{k}_{tt} - \omega^2 m_{tt}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 2.198\sqrt{\dfrac{EI}{mh^3}}, \quad \omega_2 = 5.850\sqrt{\dfrac{EI}{mh^3}} \quad \Rightarrow \phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.3871 \\ 1 \end{Bmatrix}, \ \phi_2 = \begin{Bmatrix} -1.292 \\ 1 \end{Bmatrix}$

نکته: فرکانس‌ها نسبت به مثال قبل کم شده (پریود زیاد شده). دلیل آن است که انعطاف‌پذیری تیر نیز در محاسبات وارد شده است.

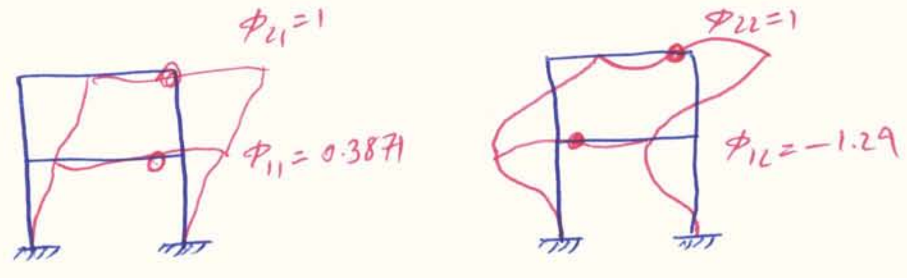
$u_0 = -K_{00}^{-1} K_{0t} u_t$

در مود اول:

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} -0.4426 & -0.2459 \\ -0.4426 & -0.2459 \\ 0.9836 & -0.7869 \\ 0.9836 & -0.7869 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3871 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{h}\begin{Bmatrix} -0.4172 \\ -0.4172 \\ -0.4061 \\ -0.4061 \end{Bmatrix}$$

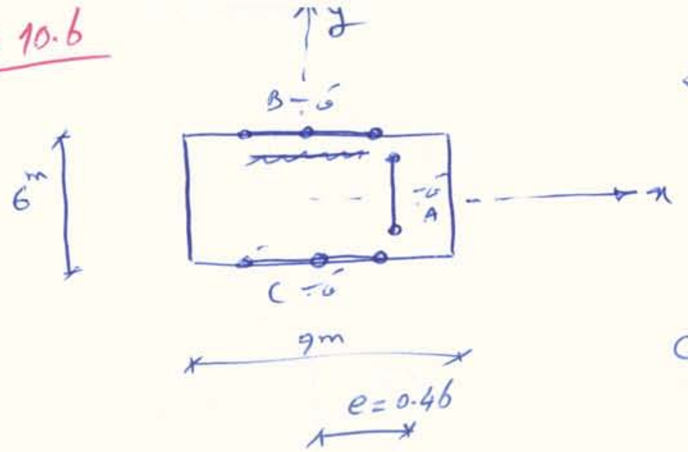
در مود دوم:

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{h}\begin{Bmatrix} 0.3258 \\ 0.3258 \\ -2.0573 \\ -2.0573 \end{Bmatrix}$$



مود اول　　　　مود دوم

Ex 10.6



وزن سقف $= 500\ kg/m^2$

A قاب $\rightarrow k_y = 112\ ton/m$

C و B قاب $\rightarrow k_x = 60\ ton/m$

ارتفاع ستون‌ها $h = 3.6m$

حل:

وزن سقف $= \omega = 9 \times 6 \times 0.5 = 27$ ton

جرم سقف $= m = \dfrac{\omega}{g} = 2.752\ \ ton\ sec^2/m$

$$I_0 = \frac{m(b^2+d^2)}{12} = 26.83\ \ ton \cdot m \cdot s^2$$

که ممان اینرسی جرمی حول محور z

معادلات حرکت:

$$\begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & I_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & ek_y \\ 0 & ek_y & e^2k_y + \frac{d^2}{2}k_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \cancel{\;\;} \\ \cancel{\;\;} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

می‌توان با ضرب $\det[k-\omega^2 m] = 0$ جواب را بدست آورد یا اینکه:

معادله اول از دومی است که می‌توان آن را بصورت مستقل حل کرد. (بصورت دو به دو)

$$m\ddot{u}_x + 2k_x u_x = 0$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k_x}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 60}{2.752}} = 6.6\ \ rad/sec$$

که چون یک دستگاه تک درجه آزادی خواهد شد.

معادله حرکت ارتعاش دو درجه آزادی کوپل شده بصورت زیر است :

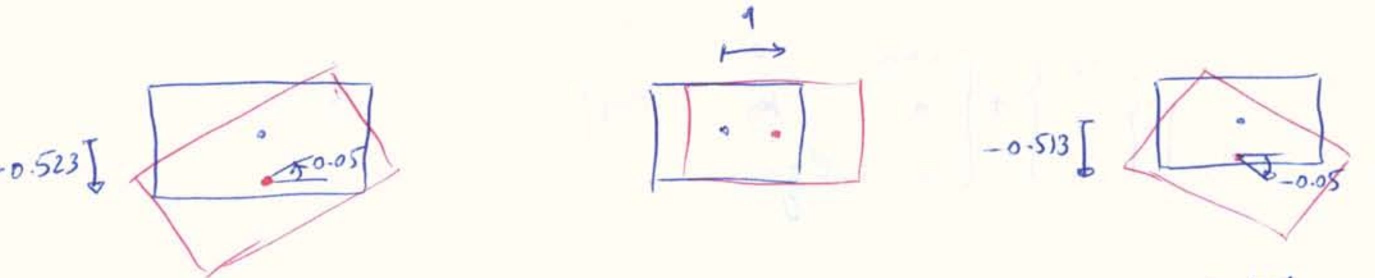
$$\begin{bmatrix} 2.752 & 0 \\ 0 & 26.83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 112 & 51.52 \\ 51.52 & 1103.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ u_\theta \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left[\underline{k} - \omega^2 \underline{m}\right] = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \quad \omega_1 = 5.9 \Rightarrow \phi_1 = \begin{Bmatrix} -0.523 \\ 0.05 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_3 = 6.8 \Rightarrow \phi_3 = \begin{Bmatrix} -0.513 \\ -0.050 \end{Bmatrix}$$

از ترکیب با حالت قبل :

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.523 \\ 0.05 \end{Bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \phi_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.513 \\ -0.050 \end{Bmatrix}$$



مود اول　　　مود دوم　　　مود سوم

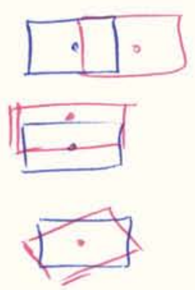
حالت خاص $e = 0$

در این حالت هر سه ارتعاش مستقل از هم اند.

$\omega_3 = \omega_x = 6.6\ rad/s$

$\omega_2 = \omega_y = 6.38$ "

$\omega_1 = \omega_\theta = 6.34$ "



Modal Expansion of displacements

هر بردار تغییرمکان دلخواهی را می‌توان بصورت مجموع N بردار مودی نوشت.

$$u = \sum_{r=1}^{N} \phi_r q_r = \Phi q$$

$$\xrightarrow[\phi_n^T m]{\text{پیش ضرب}} \quad \phi_n^T m u = \sum_{r=1}^{N} (\phi_n^T m \phi_r) q_r$$

تمامی جملات صفر اند بجز حالت $r=n$

$$\Rightarrow \quad \phi_n^T m u = (\phi_n^T m \phi_n) q_n \Rightarrow q_n = \frac{\phi_n^T m u}{\phi_n^T m \phi_n} = \frac{\phi_n^T m u}{M_n}$$

مثال: برای قاب برشی مثال 10.4، بردار تغییرمکان $u = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ را به بردارهای مودی تجزیه نمائید.

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$q_1 = \frac{\langle 0.5 \quad 1 \rangle \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\langle 0.5 \quad 1 \rangle \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{2m}{3m/2} = \frac{4}{3}$$

$$q_2 = \frac{\langle -1 \quad 1 \rangle \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\langle -1 \quad 1 \rangle \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{-m}{3m} = \frac{-1}{3}$$

$$\Rightarrow u = \sum_{r=1}^{2} \phi_r q_r = \frac{4}{3} \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{Bmatrix} + \left(\frac{-1}{3}\right) \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

پاسخ ارتعاش آزاد

$$\underline{m}\,\underline{\ddot{u}} + \underline{k}\,\underline{u} = 0 \qquad \underline{u} = \underline{u}(0) \quad , \quad \underline{\dot{u}} = \underline{\dot{u}}(0)$$

پس از حل مسأله مقدار ویژه

$$\Longrightarrow \quad u(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t \right)$$

شامل 2N ثابت اختیاری است.

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \quad \dot{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \omega_n \left(-A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t \right)$$

$$\xrightarrow{t=0} \quad u(0) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n A_n \quad , \quad \dot{u}(0) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \omega_n B_n \qquad \text{I}$$

که هرکدام N معادله جبری برای تعیین ثابت‌ها A_n و B_n میدهد.

با استفاده از روابط تجزیه مودی بردارهای $u(0)$ و $\dot{u}(0)$ داریم:

$$u(0) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n q_n(0) \quad , \quad \dot{u}(0) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \dot{q}_n(0)$$

با استفاده از روابط تجزیه مودال

$$\Longrightarrow \quad q_n(0) = \frac{\phi_n^T \underline{m}\, \underline{u}(0)}{M_n} \quad , \quad \dot{q}_n(0) = \frac{\phi_n^T \underline{m}\, \underline{\dot{u}}(0)}{M_n} \qquad \text{II}$$

I و II مقایسه

$$\Longrightarrow \quad A_n = q_n(0) = \cdots$$

$$B_n = \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} = \cdots$$

$$\Rightarrow u(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \underbrace{\left[q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \right]}$$

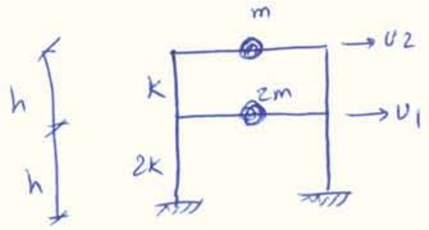
پاسخ ارتعاش آزاد سیستم چند درجه آزادی با تغییر مکان اولیه $q_n(0)$ و سرعت اولیه $\dot{q}_n(0)$

یا بعبارت دیگر

$$\boxed{u(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n q_n(t)} \qquad \text{where} \quad \boxed{q_n(t) = q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t}$$

۸۹ E 10.9

مطلوبست پاسخ ارتعاش آزاد تحت تغییر مکان اولیه $u(0)=\langle 1\ \ 2\rangle$



حل:

$$u(0)=\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}\quad,\quad \dot{u}(0)=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

از فرمول‌ها

$$\Rightarrow q_n(0)=\begin{Bmatrix}2\\0\end{Bmatrix}\quad,\quad \dot{q}_n(0)=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow q_n(t)=\begin{Bmatrix}2\cos\omega_1 t\\0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow u(t)=\begin{Bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{Bmatrix}2\cos\omega_1 t=\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}\cos\omega_1 t$$

where $\omega_1=\sqrt{K/2m}$

نکته:

$q_2(t)=0$ شده است. یعنی مود دوم مشارکتی در پاسخ ندارد.

و تمام پاسخ ناشی از مود اول است.

علت این امر اینست که تغییر مکان اولیه متناسب با مود اول (و نه برابر عملاً در مود دوم) بوده است.

Ex. 10.10.

the same Ex., but if $u(0) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow q_n(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \omega_n t \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow u(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_2 t$$

برعکس مثال قبل،

این بار تحریک را با یک مود دوم است.

Ex 10.11

if $u(0) = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ 2 \end{Bmatrix}$

$$q_n(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow q_n(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \omega_1 t \\ \cos \omega_2 t \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow u(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_1 t + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_2 t$$

هر دو مود در پاسخ مشارکت دارند!

ارتعاش آزاد سیستم های میرا

$m\ddot{U}+c\dot{U}+KU=0$ where $U=U(0)$, $\dot{U}=\dot{U}(0)$

$$U=\Phi q \Rightarrow m\Phi\ddot{q}+c\Phi\dot{q}+k\Phi q=0 \xrightarrow[\Phi^T]{\text{پیش ضرب در}} M\ddot{q}+C\dot{q}+Kq=0$$

که در آن ماتریس ها M و K قطری اند و $C=\Phi^T c\,\Phi$

* بسته به نوع میرایی داده شده C می تواند:
  * قطری باشد ⇐ میرایی کلاسیک ⇐ N معادله دیفرانسیل غیر همبسته ⇐ مودهای ارتعاش حالت بدون میرایی ...
  * قطری نباشد ⇐ میرایی غیر کلاسیک ⇐ N معادله دیفرانسیل هم بسته ⇐ ... نیست

* به همین دلیل اغلب میرایی بصورت قطری فرض می گردد.

* میرایی غیر کلاسیک در فصول بعدی

حال فرض کنید ماتریس میرایی قطری باشد. در اینصورت مودهای طبیعی تحت تأثیر میرایی قرار ندارند. بنابراین فرکانس و مودهای طبیعی ابتدا برای سیستم بدون میرایی محاسبه می شوند و سپس اثر میرایی بر فرکانس طبیعی به روش مشابه سیستم یک درجه آزادی مورد محاسبه قرار می گیرد.

$$\ddot{q}_n+2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n+\omega_n^2 q_n=0$$

شبیه ارتعاش سیستم SDOF با ω_n و ζ_n

$$\xrightarrow[\text{با } q_0]{\text{حل معادله دیفرانسیل}} q_n(t)=e^{-\zeta_n\omega_n t}\left[q_n(0)\cos\omega_{nD}t+\frac{\dot{q}_n(0)+\zeta_n\omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}}\sin\omega_{nD}t\right]$$

where $\omega_{nD}=\omega_n\sqrt{1-\zeta_n^2}$

که nامین فرکانس طبیعی میرا

$$\Rightarrow u(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n e^{-\xi_n \omega_n t} \left[q_n(0) \cos \omega_{nD} t + \underbrace{\frac{\dot{q}_n(0) + \xi_n \omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}} \sin \omega_{nD} t}_{} \right]$$

حل مسائل ارتعاش آزاد سیستم‌های چند درجه آزادی با میرایی کلاسیک

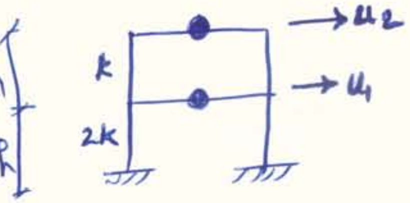
این حل تغییرشکل u را به‌صورت تابعی از زمان به علت تغییرشکل اولیه $u(0)$ و $\dot{u}(0)$ توصیف می‌کند.

Ex 10.13

مطلوبست تعیین پاسخ ارتعاش آزاد قاب برشی دوطبقه شکل 10.9.4

با $c=\sqrt{\frac{km}{200}}$ به علت تغییر مکان اولیه

$$u(0)=\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}$$



در مثال های قبل Ex 10.10 ، $q_n(0)$ محاسبه شده است

$$q(0)=\begin{Bmatrix}q_1(0)\\q_2(0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}$$

$$\dot{q}(0)=\begin{Bmatrix}\dot{q}_1(0)\\\dot{q}_2(0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

با جایگذاری در رابطه قبل :

$$u(t)=\begin{Bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}e^{-\zeta_2\omega_2 t}\left(\cos\omega_{2D}t+\frac{\zeta_2}{\sqrt{1-\zeta_2^2}}\sin\omega_{2D}t\right)$$

شکل مود دوم

* طبق محاسبات قبل

$$\omega_2=\sqrt{2k/m}\ ,\ \zeta_2=0.1$$

* چون $q_1(t)=0$ است ، مود اول هیچ شرکتی در پاسخ ندارد ، $\sum_{n=1}^{2}$ به $\sum_{n=2}^{2}$ تبدیل شد .

قطری سازی ماتریس میرایی

میرایی رایلی

Rayleigh Damping

$c = a_0 m$ & $c = a_1 k$

که واحد $\frac{1}{s}$ دارد — که واحد s دارد.

اگر ماتریس میرایی ضریبی از ماتریس جرم یا سختی باشد، آنگاه تبدیل به قطری می‌شود.

* اگر ماتریس میرایی را متناسب با ماتریس جرم در نظر بگیریم، آنگاه برای مود n ام:

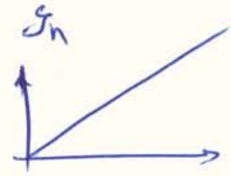
$$C_n = a_0 M_n \Rightarrow \xi_n = \frac{a_0}{2}\frac{1}{\omega_n}$$ ← (استفاده شده $\xi_n = \frac{C_n}{2M_n\omega_n}$ از رابطه)

که رابطه معکوس با ω_n دارد

* اگر ماتریس میرایی را متناسب با ماتریس سختی بگیریم آنگاه:

$$C_n = a_1 \overbrace{\omega_n^2 M_n}^{K_n} \Rightarrow \xi_n = \frac{a_1}{2}\omega_n$$

که رابطه مستقیم با ω_n دارد



ولیکن نتایج آزمایشات بیانگر آن است که میرایی برای مودهای مختلف تفاوت بسیار زیادی ندارد.

بنابراین میرایی رایلی پیشنهاد شد.

$$c = a_0 m + a_1 k \Rightarrow \zeta_n = \frac{a_0}{2}\frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2}\omega_n$$

اگر میرایی را در دو مود i ، j بدانیم،

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix}$$

$$\text{if } \zeta_i = \zeta_j = \zeta \Rightarrow a_0 = \zeta\frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i+\omega_j} \quad , \quad a_1 = \zeta\frac{2}{\omega_i+\omega_j}$$

پاسخ سیستم MDOF به تحریک زلزله

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{P(t)\} = -[M]\{r\}\ddot{u}_g(t)$$

بردار تأثیر شتاب زمین بر جرم‌ها از درجات آزادی

$$\xrightarrow{\text{تحلیل فرکانس}} [\Phi'] = \left\{ \{\phi'_1\}, \dots, \{\phi'_j\}, \dots, \{\phi'_N\} \right\}$$

$$\text{if } \{u(t)\} = \sum_{r=1}^{N} \phi_r q_r(t) = [\Phi']\{q(t)\} \xrightarrow[\text{پیش‌ضرب در } [\Phi']^T]{\text{جایگزینی در معادله حرکت و}}$$

$$\underbrace{[\Phi']^T[M][\Phi']}_{\text{ماتریس قطری}}\{\ddot{q}(t)\} + \underbrace{[\Phi']^T[C][\Phi']}_{\text{ماتریس قطری (شرط میرایی کلاسیک)}}\{\dot{q}(t)\} + \underbrace{[\Phi']^T[K][\Phi']}_{\text{ماتریس قطری}}\{q(t)\} = -[\Phi']^T[M]\{r\}\ddot{u}_g(t)$$

$$\Rightarrow M_j \ddot{q}_j(t) + C_j \dot{q}_j(t) + K_j q_j(t) = L'_j \ddot{u}_g(t)$$

where
$$M_j = \{\phi'_j\}^T[M]\{\phi'_j\}$$
$$K_j = \{\phi'_j\}^T[K]\{\phi'_j\} = \omega_j^2 M_j$$
$$C_j = \{\phi'_j\}^T[C]\{\phi'_j\} = 2\xi_j \omega_j M_j$$

نسبت میرایی مود j ام

$$L'_j = -\{\phi'_j\}^T[M]\{r\} = \gamma'_j M_j$$

ضریب مشارکت نیروی زلزله در مود j ام

اگر مودهای $\{\phi'_j\}$ نسبت به جرم مودی هم‌پایه (نرمال) شوند،

$$\{\phi_j\} = \frac{1}{\sqrt{M_j}}\{\phi'_j\}$$

خواهیم داشت:

$$\{\phi_j\}^T[M]\{\phi_j\} = 1$$
$$K_j = \omega_j^2$$
$$C_j = 2\xi_j \omega_j$$

$$\gamma_j = \gamma'_j\sqrt{M_j} \Rightarrow \gamma_j = -\{\phi_j\}^T[M]\{r\} \underset{\text{قطری}}{\overset{\text{ماتریس جرم}}{=\!=\!=}} -\sum_{i=1}^{N} m_i \phi_{ij} r_i$$

بعبارت دیگر سازه چند درجه آزاد برابر است با: مجموع پاسخ‌های سیستم یک درجه آزاد که هر کدام از آنها دارای جرم M_j ، فرکانس زاویه‌ای ω_j ،

نسبت میرایی ξ_j باشند.

* حل معادلات مودال بصورت ذیل است (انتگرال دوهامل)

$$q_j(t) = -\int_0^t \gamma_j \, \ddot{u}_g(\tau) \, h_j(t-\tau) \, d\tau$$

$$\Rightarrow \{u(t)\} = \{\phi_1\} q_1(t) + \{\phi_2\} q_2(t) + \dots + \{\phi_N\} q_N(t) = \sum_{r=1}^{N} \{\phi_r\} q_r(t)$$

$$\xRightarrow{\text{سطر i ام}} \underbrace{u_i(t)}_{} = \phi_{i1} q_1(t) + \phi_{i2} q_2(t) + \dots + \phi_{iN} q_N(t) = \sum_{j=1}^{N} \phi_{ij} q_j(t)$$

طبقه

or

$$u_i(t) = -\sum_{j=1}^{N} \gamma_j \phi_{ij} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \, h_j(t-\tau) \, d\tau$$

روش استاتیکی معادل (شبه استاتیکی)

در یک سازه برشی، نیروهای برشی طبقات برابر است با :

$$\{f_s\} = [K]\{u\}$$
$$= [K][\Phi]\{q\} = \sum_{j=1}^{N} [K]\{\phi_j\} q_j(t) = \sum_{j=1}^{N} \omega_j^2 [M]\{\phi_j\} q_j(t)$$

با در نظر گرفتن مود اول (اصلی) از روش حذف مودهای بالاتر و جمع نیروهای برشی طبقات، نیروی برشی پایه به صورت ذیل است :

$$\left.\begin{array}{l} V = \sum_{i=1}^{N} f_{si} = \{1\}^T\{f_s\} = \omega_1^2 \underbrace{\{1\}^T[M]\{\phi_1\}}_{\gamma_1 M_1} q_1(t) \\ \{r\}=\{1\} \Rightarrow \gamma_1 = \{1\}^T[M]\{\phi_1\}/M_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

در سازه‌های برشی

$$V = \gamma_1 M_1 \omega_1^2$$ [redacted] $$q_1(t)$$

$$\Rightarrow V_{max} = \gamma_1^2 M_1 \omega_1^2 \underbrace{\left\{\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)\, h_1(t-\tau)\, d\tau\right\}_{max}}_{\text{برابر با طیف تغییر مکان}}$$

$$= \gamma_1^2 M_1 \omega_1^2 S_d(\omega_1, \xi_1)$$
$$= \underbrace{\gamma_1^2 M_1}_{\text{همیشه } <1} S_a(\omega_1, \xi_1)$$

γ_1 فاکتور مود اول و دیگر اندازه‌ای است پس $\gamma_1^2 M_1$ برابر است با کسری از جرم کل سازه.

پس برای این با حذف از مودهای بالاتر، عملاً تأثیر مقداری از جرم سازه در محاسبات پاسخ حذف خواهد شد، که در اصطلاح به تأثیر جرم گم شده یا Missing Mass Effect معروف است. در عمل باعث می‌شود این روش، یک روش تقریبی باشد.

$$\Rightarrow V_{max} = \alpha M_T S_a(\omega_1, \zeta_1) = \cancel{\alpha M_T} \; \underbrace{\alpha}_{\frac{I}{R}} W_T \frac{S_a(\omega_1, \zeta_1)}{g} \rightarrow$$

ضریب شتاب (ضریب بازتاب) $= A.B$ ب ط

۲۸۰۰

$$\Rightarrow \boxed{V_{max} = \frac{ABI}{R} W}$$

قابل استفاده برای طراحی اولیه سازه‌های کوتاه، منظم، و غیرمهم

Response Spectrum Method

Newmarck & Rosenblueth, [143]

همانند روش قبل می باشد، با این تفاوت که بجای در نظر گرفتن همه مودهای اصلی، چند مود اول در نظر گرفته می شوند.

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{j=1}^{N} \{\phi_j\} q_j \quad \leftarrow$$ بردار تغییر مکان

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \phi_{ij}\, q_j(t) \quad \leftarrow$$ تغییرمکان طبقه i ام

$$(u_{ij})_{max} = \phi_{ij}\, \gamma_j\, S_d(\omega_j, \xi_j) \quad \leftarrow$$ پاسخ j امین مود تغییرمکان طبقه i ام

$$f_{s\,ij} = (\omega_j^2 m_i)\underbrace{\left[\phi_{ij}\, \gamma_j\, S_d(\omega_j, \xi_j)\right]}_{*} \quad \leftarrow$$ با توجه به اینکه ماتریس جرم برای اکثر سازه ها قطری است
پاسخ j امین مود نیروی برشی طبقه i ام

$$= \gamma_j\, \phi_{ij}\, w_i\, S_a(\omega_j, \xi_j)/g$$

where $w_i = m_i g$

$\bar{S}_a = S_a/g$

$$\Rightarrow \quad V_j = \text{نیروی برشی پایه ناشی از مود j ام} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_j\, \phi_{ij}\, w_i\, \bar{S}_a(\omega_j, \xi_j)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} \phi_{ij}\, w_i\right) \gamma_j\, \bar{S}_a(\omega_j, \xi_j)$$

با توجه به قطری بودن ماتریس جرم $\Rightarrow$

$$\gamma_j = \frac{\{\phi_j\}^T [M]\{1\}}{\{\phi_j\}^T [M]\{\phi_j\}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \phi_{ij}}{\sum_{i=1}^{N} m_i \phi_{ij}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \phi_{ij}}{\sum_{i=1}^{N} w_i \phi_{ij}^2} \Rightarrow$$

$$V_j = \left[\frac{(\sum w_i \phi_{ij})^2}{\sum w_i \phi_{ij}^2} \right] S_a(\omega_j, \xi_j) = W_j \cdot AB_j$$

$\underbrace{\left[\frac{(\sum w_i \phi_{ij})^2}{\sum w_i \phi_{ij}^2} \right]}_{\text{وزن موثر مود j ام } (W_j)}$

$S_a(\omega_j, \xi_j) \rightarrow AB_j =$ از طیف ۲۸۰۰

با در نظر گرفتن رفتار غیر ارتجاعی سازه برحسب ضریب کاهش R و منظور نمودن ضریب اهمیت سازه (I) خواهیم داشت:

$$V_j = \frac{AB_j I}{R} W_j$$

با توجه به اینکه مودها هم فاز نیستند پاسخ مودها را می‌توان با روش‌های مختلف آماری با یکدیگر ترکیب نمود:

* روش ABS

$$V = \sum_{j=1} |V_j| = |V_1| + |V_2| + \cdots$$

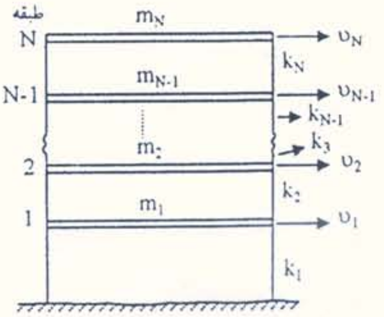
* روش SRSS

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + \cdots}$$

هرچه تعداد مودها بیشتر انتخاب شود، دقت این روش افزایش پیدا خواهد کرد.

* روش CQC اثرات اندرکنش مودها هم در نظر می‌گیرد.

ماتریسهای جرم و سختی و میرایی ساختمان برشی و پیچشی

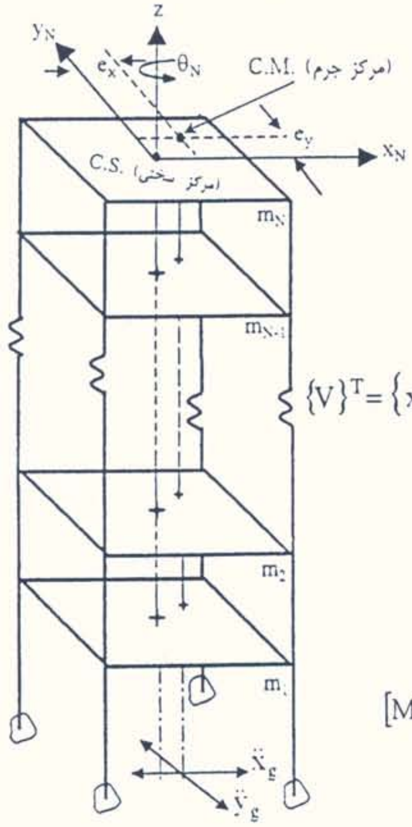


ساختمان برشی: هر طبقه دارای یک درجه آزادی (υ_i) که تغییرمکان طبقه i نسبت به فونداسیون می‌باشد.

$$\underset{(N\times N)}{[K]}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & & & \bigcirc \\ & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & & \\ & & k_3+k_4 & -k_4 & & \\ & & & \ddots & & \\ & \text{Sym.} & & & k_{N-1}+k_N & -k_N \\ & & & & & k_N \end{bmatrix}$$

$$\underset{(N\times N)}{[M]}=\begin{bmatrix} m_1 & & & & 0 \\ & m_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_{N-1} & \\ 0 & & & & m_N \end{bmatrix}$$

ماتریس جرم قطری می‌باشد.



ساختمان پیچشی: هر طبقه دارای سه درجه آزادی x_i ، y_i و θ_i می‌باشد (شکل مقابل):

$\{V\}$= بردار تغییرمکان درجات آزادی سیستم: $\{V\}^T=\{x_1\ \ y_1\ \ \theta_1|x_2\ \ y_2\ \ \theta_2|\cdots\ \ x_N\ \ y_N\ \ \theta_N\}^T$

ماتریس جرم [M]:

با فرض متمرکز بودن جرم سازه در طبقات، ماتریس جرم سیستم قطری خواهد بود.

$$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & & & & & & \\ & m_1 & & & \bigcirc & & \\ & & m_1r_1^2 & & & & \\ & & & m_2 & & & \\ & \bigcirc & & & m_2 & & \\ & & & & & m_2r_2^2 & \\ & & (3N\times 3N) & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

m_i = جرم طبقه i ام

$I_i = m_i r_i^2$ = ممان اینرسی طبقه i ام

r_i = شعاع جیراسیون طبقه i ام

ماتریس سختی [K]:

$$\underset{(3N\times 3N)}{[K]}=\begin{bmatrix} K^1+K^2 & -K^2 & 0 & & \bigcirc \\ & K^2+K^3 & -K^3 & & \\ & & \ddots & & \\ & \text{Sym} & & K^{N-1}+K^N & -K^N \\ & & & & K^N \end{bmatrix};$$

$$\underset{3\times 3}{[K^i]}=\left[\begin{array}{c:c:c} k_{x_i} & 0. & -(e_{y_i}k_{x_i}) \\ \hdashline 0. & k_{y_i} & +(e_{x_i}k_{y_i}) \\ \hdashline -(e_{y_i}k_{x_i}) & (e_{x_i}k_{y_i}) & (k_{\theta_i}+e_{x_i}^2k_{y_i}+e_{y_i}^2k_{x_i}) \end{array}\right] \quad ; \quad e_{x_i}=\frac{\sum_{j=1}^{n}k_{y_{ij}}x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n}k_{y_{ij}}}$$

بردار ضریب تأثیر زلزله

$$;\quad \{r_x\}^i=\{1\ \ 0\ \ 0\}^T \ ;\ \{r_y\}^i=\{0\ \ 1\ \ 0\}^T$$

$$k_{\theta_i}=\sum_{j=1}^{n}k_{x_{ij}}\,y_{ij}^2+k_{y_{ij}}\,x_{ij}^2$$

n = تعداد ستونهای در یک طبقه ; x_{ij} = فاصله ستون j در طبقه i از محور مختصات در جهت x

ماتریس میرایی [C]:

ماتریس میرایی از نظر فرم، شبیه ماتریس سختی می‌باشد. با این تفاوت که مقادیر c_{x_i}، c_{y_i} و c_{θ_i} جایگزین مقادیر k_{x_i}، k_{y_i} و k_{θ_i} می‌شوند.

$$c_{x_i}=2\zeta_{x_i}\sqrt{k_{x_i}m_i} \quad ; \quad c_{y_i}=2\zeta_{y_i}\sqrt{k_{y_i}m_i} \quad ; \quad c_{\theta_i}=2\zeta_{\theta_i}\sqrt{k_{\theta_i}I_i}$$

که در آن ξ_x و ξ_y = ضرایب میرایی‌سیستم در جهت x و y هر طبقه است.

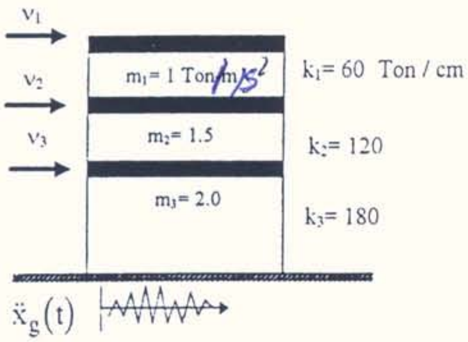
$\omega_1 = 7.04$
$\omega_2 = 19.72$
$\omega_3 = 28.49$

روش محاسبه دینامیکی
(پاسخ طیفی)

الف: مشخصات دینامیکی سیستم

۱- معادله حرکت

$$[M]\{\ddot{V}\}+[K]\{V\}=-[M]\{1\}\ddot{X}_g(t)$$



$$M=\begin{bmatrix}1.0 & 0 & 0\\ 0 & 1.5 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},K=60\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

۲- محاسبه فرکانسها

$$\text{Det.}\left[K-\omega^2M\right]=0 \Rightarrow \begin{array}{lll} \omega_1 = 4.58 \text{ rad/sec.} & & T_1 = 1.37 \text{ sec.} \\ \omega_2 = 9.82 \text{ rad/sec.} & \rightarrow & T_2 = .640 \text{ sec.} \\ \omega_3 = 14.59 \text{ rad/sec.} & & T_3 = .431 \text{ sec.} \end{array}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

۳- محاسبه اشکال مود

مود ۱ $\omega_1 = 4.58$ مود ۲ $\omega_2 = 9.82$ مود ۳ $\omega_3 = 14.59$

$$\phi_1=\begin{Bmatrix}1.0\\ .644\\ .30\end{Bmatrix}$$

$$\phi_2=\begin{Bmatrix}1.0\\ -.601\\ -.676\end{Bmatrix},$$

$$\phi_3=\begin{Bmatrix}1.0\\ -2.57\\ 2.47\end{Bmatrix}$$

٤- محاسبه جرم مودی (M_n)

$$M_1=\phi_1^TM\,\phi_1=\sum_{i=1}^{3}m_i\,\phi_{1i}^2=1\times(1)^2+1.5\times(.644)^2+2\times(.3)^2=1.802$$

$(\phi, \ldots, m = \begin{bmatrix}30 & & \\ & 30 & \\ & & 30\end{bmatrix}$

$$M_2=1\times(1)^2+1.5(-.601)^2+2(-.676)^2=2.456$$

$$M_3=23.10$$

٥- محاسبه ضریب تاثیر زلزله در هر مود

$$\gamma_n=\frac{L_n}{M_n},\quad L_n=\{\phi_n\}^T[M]\{1\}=\sum_{i=1}^{3}m_i\,\phi_{ni}$$

$$L_1 = \sum_{i=1}^{3} m_i \, \phi_{1i} = 1\times 1 + 1.5\times .644 + 2\times .3 = 2.566 \rightarrow \gamma_1 = \frac{2.566}{1.802} = 1.425$$

$$L_2 = -1.254 \quad \rightarrow \quad \gamma_2 = \frac{-1.254}{2.455} = -0.51$$

$$L_3 = 2.08 \quad \rightarrow \quad \gamma_3 = \frac{2.08}{23.10} = 0.09$$

در ساختمانهای برشی $\sum \gamma_i = 1$

جرم موثر مودی که بیانگر تاثیر مودها نیز می باشد به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$\overline{M}_n = \frac{L_n^2}{M_n} = L_n \gamma_n$$

$$\overline{M}_1 = 3.656 \;,\; \overline{M}_2 = 0.641 \;,\; \overline{M}_3 = 0.188 \;,\; \sum \overline{M}_n = 4.485 \approx \sum m_n = 4.5$$

مجموع جرم موثر مودی برابر با مجموع جرم سازه است $\sum \overline{M}_n = \sum m_n$

• مشاهده می شود که ضریب تاثیر زلزله یا جرم موثر در مودهای بالا کاهش پیدا می کند. به عبارتی تاثیر مودهای بالا در پاسخ قابل صرفنظر کردن است. در ساختمانهای برشی جمع ضرایب تاثیر مودها ($\sum \gamma_i$) برابر با یک است.

بنابراین معیار در نظر گرفتن تعداد مودها در محاسبات پاسخ مقدار γ_n یا M_n است. تعداد مودها طوری انتخاب می شود که دربرگیرنده ۹۰ تا ۹۵ درصد جرم کل سازه ($\sum \overline{M}_n = ۰,۹ \sum m_n$) باشد یا مودهایی حذف می گردد که ضریب تاثیر مود در مقایسه با دیگر ضرایب تاثیر قابل صرف نظر کردن باشد.

٦- محاسبه پاسخ مودی

الف - تغییر مکان

$$\upsilon_n = \phi_n \gamma_n S_{dn} = \phi_n \gamma_n \frac{S_{vn}}{\omega_n} = \phi_n \gamma_n \frac{S_{an}}{\omega_n^2}$$

مقادیر طیف بستگی به فرکانس و ضریب میرایی دارد. لذا باید ضریب میرایی مناسب سازه انتخاب شود. اگر ضریب میرایی ۵٪ فرض شود مقادیر طیف تغییرمکان خواهند شد:

$$\omega_1 = .73\ HZ \quad \Rightarrow S_{d_1} = 17cm \;,\; S_{v_1} = 78\,cm/sec \;,\; S_{a_1} = 357\,cm/sec^2$$

$$\omega_2 = 1.56\ HZ \quad \Rightarrow S_{d_2} = 7cm \;,\; S_{v_2} = 68.7\,cm/sec \;,\; S_{a_2} = 675\,cm/sec^2$$

$$\omega_3 = 2.32\ HZ \quad \Rightarrow S_{d_3} = 5cm \;,\; S_{v_3} = 73\,cm/sec \;,\; S_{a_3} = 1065\,cm/sec^2$$

مود ۱

$$\upsilon_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ .644 \\ .3 \end{Bmatrix} (1.425)\,(17) = \begin{Bmatrix} 24.2 \\ 15.6 \\ 7.3 \end{Bmatrix}$$

مود ۲

$$\upsilon_2 = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -.601 \\ -.676 \end{Bmatrix} (-.51)\,(7) = \begin{Bmatrix} -3.57 \\ 2.15 \\ 2.41 \end{Bmatrix}$$

مود ۳

$$\upsilon_3 = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -2.57 \\ 2.47 \end{Bmatrix} (.09)\,(5) = \begin{Bmatrix} .45 \\ -1.16 \\ 1.11 \end{Bmatrix}$$

محاسبه تغییرمکان با روش ترکیب مودها

روش **ABS**: جمع قدر مطلق پاسخ هر مود (اعداد ردیف افقی نیستند)

تغییرمکان طبقه بالا

$$\upsilon = \sum_{i=1}^{3} |\upsilon_i| = \begin{Bmatrix} 28.2 \\ 18.9 \\ 10.82 \end{Bmatrix}$$

روش **SRSS**: جذر مجموع مربع پاسخ مودها

$$\upsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \upsilon_i^2} = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2}$$

$$\upsilon^2 = \begin{Bmatrix} 24.2 \\ 15.6 \\ 7.3 \end{Bmatrix}^2 + \begin{Bmatrix} -3.57 \\ 2.15 \\ 2.41 \end{Bmatrix}^2 + \begin{Bmatrix} .45 \\ -1.16 \\ 1.11 \end{Bmatrix}^2 = \begin{Bmatrix} 599 \\ 249 \\ 60 \end{Bmatrix} \Rightarrow \upsilon = \begin{Bmatrix} 24.4 \\ 15.8 \\ 7.76 \end{Bmatrix}$$

ب– نیروهای جانبی و برشی طبقات

۷– شکل مود نیروی جانبی

$$\phi_{s1} = K\phi_1 = 60 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ .644 \\ .3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21.36 \\ 19.92 \\ 12.72 \end{Bmatrix}$$

شکل مود نیروی جانبی طبقه اول (طبقه بالا)

$$\phi_{b1} = 54.00$$

شکل مود ۱ نیروی برشی پایه

$$\phi_{s2} = K\phi_2 = \begin{Bmatrix} 96.1 \\ -87.1 \\ -131 \end{Bmatrix} \qquad \phi_{s3} = K\phi_3 = \begin{Bmatrix} 214 \\ -819 \\ 1049 \end{Bmatrix}$$

شکل مود ۲ نیروی برشی پایه $\phi_{b2} = -121.7$

شکل مود ۳ نیروی برشی پایه $\phi_{b3} = 444.6$

۸– پاسخ مودی نیروهای جانبی و برشی

$$f_{sn} = \phi_{sn}\,\gamma_n\,S_{dn}$$

$$f_{s1} = \begin{Bmatrix} 21.36 \\ 19.92 \\ 12.72 \end{Bmatrix} \times 1.425 \times 17 = \begin{Bmatrix} \overset{517.45}{\cancel{96.3}} \\ \cancel{-369}\ \ 483 \\ \cancel{472}\ \ 308 \end{Bmatrix} \qquad f_{b1} = 1308$$

$$f_{s2} = \begin{Bmatrix} -343 \\ 311 \\ +468 \end{Bmatrix} \quad , \quad \underline{f_{b2} = 434.6} \qquad ; \qquad f_{s3} = \begin{Bmatrix} 96.3 \\ -369 \\ 472 \end{Bmatrix} \quad , \quad \underline{f_{b3} = 200}$$

روش ABS

$$f_s = \sum_{n=1}^{3} |f_{sn}| = \begin{Bmatrix} 517+343+96 \\ 483+311+369 \\ 308+468+472 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 956 \\ 1163 \\ 1248 \end{Bmatrix}$$

برش پایه $V = 1308+434.6+200 = 1942.6$

روش SRSS

$$f_s = \sqrt{\sum f_{sn}^2} = \begin{Bmatrix} 517^2 + 343^2 + 96^2 \\ 483^2 + 311^2 + 369^2 \\ 308^2 + 468^2 + 972^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 627 \\ 682 \\ 732 \end{Bmatrix}$$

$$V = \sqrt{1308^2 + 434.6^2 + 200^2} = 1392$$

روش دقیق پاسخ طیفی

$$R_D^2 = \sum R_j^2 + 2\sum_j \sum_k \gamma_j \gamma_k \, \psi_j \psi_k \left[A_{jk} S_{dj}^2 + B_{jk} S_{vj}^2 + C_{jk} S_{dk}^2 + D_{jk} S_{vk}^2 \right]$$

که در آن R_j برابر پاسخ مودی کمیت مورد نظر است و ضرایب A_{jk} تا D_{jk} با استفاده از رابطه (۷-۵۳) کتاب ارتعاشات پیشا برای محاسبه اثر اندرکنش بین مودها محاسبه می گردد.

$$\begin{bmatrix} 1 & u-s & 1 \\ u & 1-t & s \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{jk} \\ \overline{B}_{jk} \\ C_{jk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\left(1 + r^2 - 4\xi_j \xi_k r\right) \\ r^2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{aligned} B_{jk} &= \overline{B}_{jk} / \omega_k^2 \\ D_{jk} &= -B_{jk} \end{aligned}$$

محاسبه ضرایب اندرکنش مود ۱ و ۲

$$\omega_1 = 4.59 \,, \quad \omega_2 = 9.82 \,, \quad r = \omega_1/\omega_2 = 0.4674 \,, \quad r^2 = .21851 \,, \quad \xi_1 = \xi_2 = 0.05$$

$$u = -2\left(1 - 2\xi_2^2\right) = -1.99 \quad s = -2r^2\left(1 - 2\xi_1^2\right) = -.4348 \quad t = r^4 = .0477$$

$$\left(1 + r^2 - 4\xi^2 r\right) = \left(1 + .2185 + 4 \times .0225 \times .4674\right) = 1.2231$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.555 & 1 \\ -1.99 & .9523 & -.4348 \\ 1 & 0 & .0477 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{12} \\ \overline{B}_{12} \\ C_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.2231 \\ .2185 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} A_{12} &= .2759 \\ \overline{B}_{12} &= -1.254 \\ C_{12} &= -1.234 \end{aligned}$$

$$B_{12} = -1.254/(9.82)^2 = -0.13 \quad , \quad D_{12} = -B_{12} = .013$$

محاسبه ضرایب اندرکنش مود ۱ و ۳

$$\omega_1 = 4.59\ ,\ \omega_3 = 14.59\ ,\ r = \omega_1/\omega_3 = 0.3146\ ,\ r^2 = 0.99\ ,\ \xi_1 = \xi_3 = .05$$

$$u = -1.99 \quad s = -0.197 \quad t = 0.0098 \quad , \quad \left(1 + r^2 - 4\xi^2 r\right) = +1.0958$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.793 & 1 \\ -1.99 & .9902 & -.197 \\ 1 & 0 & .0098 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{13} \\ \overline{B}_{13} \\ C_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.0958 \\ 0.099 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_{13} = .109 \\ \overline{B}_{13} = -1.0645 \\ C_{13} = -1.086 \end{matrix}$$

$$B_{13} = -1.0645/(14.59)^2 = -.005 \quad , \quad D_{13} = .005$$

محاسبه ضرایب اندرکنش مود ۲ و ۳

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.09 & 1 \\ -1.99 & .795 & -.901 \\ 1 & 0 & .205 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{23} \\ \overline{B}_{23} \\ C_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.446 \\ .453 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_{23} = .795 \\ \overline{B}_{23} = -1.724 \\ C_{23} = -1.668 \end{matrix}$$

$$B_{23} = -1.724/(14.59)^2 = -.0081 \quad , \quad D_{23} = .0081$$

برش پایه (V):

$$V^2 = \left[(1308)^2 + (434.6)^2 + (200)^2\right]$$

۱و۲ $\rightarrow$ $$+2\left\{ 1.425 \times .51 \times 54 \times 121.7 \left[.2759 \times (17)^2 - .013 \times (78)^2 - 1.234(7)^2 + .013(68.7)^2\right]\right.$$

۱و۳ $\rightarrow$ $$+1.425 \times .09 \times 54 \times 444.6\left[.109(17)^2 - .005(78)^2 - 1.086(5)^2 + .005(78)^2\right]$$

۲و۳ $\rightarrow$ $$\left. +.51 \times .09 \times 121.7 \times 444.6\left[.795(7)^2 - .008(68.7)^2 - 1.668(5)^2 + .008(78)^2\right]\right\}$$

$$1939741 + 2\{4776 \times 1.53 + 3079 \times 4.35 + 2483.55 \times 8.1695\}$$

$$V^2 = 1939741 + 2\{\cancel{7336 \times 1.536 + 815 \times .265 + 5295 \times 2.13}\}$$

$$1968169.91$$

$$V^2 = \cancel{1965604} \Rightarrow \underline{\underline{V = 1402}}$$

نیروی جانبی طبقه ۲

$$f_{s2}^2 = (682)^2 + 2(-5592) = 453940 \quad \Rightarrow \quad f_{s2} = 673.8$$

روش CQC

$$R_D^2 = \sum R_j^2 + 2\sum\sum \rho_{jk} R_j R_k$$

ضریب همبستگی مودها:

$$\rho_{jk} = \frac{8\xi^2 (1 + r)\, r^{3/2}}{\left(1 - r^2\right)^2 + 4\xi^2 r\,(1 + r)^2}$$

مود ۱ و ۲:

$$r = \omega_2/\omega_1 = 9.82/4.59 = 2.139$$

$$\rho_{12}=\frac{8(.05)^2(1+2.139)\;2.139^{3/2}}{\left(1-2.139^2\right)^2+.01\times 2.139(1+2.139)^2}=\frac{0.1964}{12.993}=0.0151$$

مود ۱ و ۳:

$$r=\omega_3/\omega_1=3.1786$$

$$\rho_{12}=\frac{A_{12}\,S_{d1}^2+B_{12}\,S_{v1}^2+C_{12}\,S_{d2}^2+D_{12}\,S_{v2}^2}{S_{d_1}\,S_{d_2}}$$

$$=\frac{.2759(17)^2-.013(78)^2-1.234(7)^2+.013(68.7)^2}{17\times 7}=.012$$

دقیق $\rho_{13}=\frac{.265}{17\times 5}=.003$

دقیق $\rho_{23}=\frac{2.13}{7\times 5}=.067$

cac $\rho_{13}=\frac{.02\,(4.1786)\;3.1786^{3/2}}{\left(1-3.1786^2\right)+.031786(4.1786)^2}=\frac{0.474}{83.43}=.0056$

مود ۲ و ۳:

$$r=\omega_3/\omega_2=1.4857$$

cac $\rho_{23}=\frac{.02\,(2.4857)\;1.4857^{3/2}}{\left(1-1.4857^2\right)^2+0.14857\,(2.485.7)^2}=\frac{0.0900}{1.5494}=0.058$

برش پایه (V)

$$R_j=V_j:\quad V_1=1308\quad,\quad V_2=434.6\quad,\quad V_3=200$$

$$V^2=\sum V_j^2+2\sum\sum \rho_{jk}\,V_j\,V_k$$

$$=\left[1308^2+434.6^2+200^2\right]+2\{.0151\times 1308\times 434.6+.0056\times 1308\times 200$$

$$+.058\times 434.6\times 200\}=1939741+15090=1954831$$

$\underline{V=1398}$

نیروی جانبی طبقه ۲

$$f_{s2}^2=(682)^2+(-5389)\Rightarrow \underline{\underline{f_{s2}=678}}$$

$$K_s=P\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_k\,\psi_k}{\omega_k^2}$$

محاسبه ضرایب اندرکنش مود ۱ و ۳

$\omega_1 = 4.59$, $\omega_3 = 14.59$, $r = \omega_1/\omega_3 = 0.3146$, $r^2 = 0.99$, $\xi_1 = \xi_3 = .05$

$u = -1.99 \quad s = -0.197 \quad t = 0.0098 \quad , \quad \left(1 + r^2 - 4\xi^2 r\right) = +1.0958$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.793 & 1 \\ -1.99 & .9902 & -.197 \\ 1 & 0 & .0098 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{13} \\ \overline{B}_{13} \\ C_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.0958 \\ 0.099 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_{13} = .109 \\ \overline{B}_{13} = -1.0645 \\ C_{13} = -1.086 \end{matrix}$$

$B_{13} = -1.0645/(14.59)^2 = -.005 \quad , \quad D_{13} = .005$

محاسبه ضرایب اندرکنش مود ۲ و ۳

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.09 & 1 \\ -1.99 & .795 & -.901 \\ 1 & 0 & .205 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{23} \\ \overline{B}_{23} \\ C_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.446 \\ .453 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_{23} = .795 \\ \overline{B}_{23} = -1.724 \\ C_{23} = -1.668 \end{matrix}$$

$B_{23} = -1.724/(14.59)^2 = -.0081 \quad , \quad D_{23} = .0081$

برش پایه (V):

$$V^2 = \left[(1308)^2 + (434.6)^2 + (200)^2\right]$$

۱و۲ $\rightarrow +2\Big\{ 1.425 \times .51 \times 54 \times 121.7 \left[.2759 \times (17)^2 - .013 \times (78)^2 - 1.234(7)^2 + .013(68.7)^2\right]$

۱و۳ $\rightarrow +1.425 \times .09 \times 54 \times 444.6\left[.109(17)^2 - .005(78)^2 - 1.086(5)^2 + .005(78)^2\right]$

۲و۳ $\rightarrow +.51 \times .09 \times 121.7 \times 444.6\left[.795(7)^2 - .008(68.7)^2 - 1.668(5)^2 + .008(78)^2\right]\Big\}$

$1939741 + 2\{4776 \times 1.53 + 3079 \times 4.35 + 2483.55 \times 8.1695\}$

$V^2 = 1939741 + 2\{\cancel{7336 \times 1.536 + 815 \times .265 + 5295 \times 2.13}\}$

1968169.91

$V^2 = \cancel{1965604} \Rightarrow \underline{\underline{V = 1402}}$

نیروی جانبی طبقه ۲

$f_{s2}^2 = (682)^2 + 2(-5592) = 453940 \quad \Rightarrow \quad f_{s2} = 673.8$

روش CQC

$$R_D^2 = \sum R_j^2 + 2\sum\sum \rho_{jk} R_j R_k$$

ضریب همبستگی مودها:

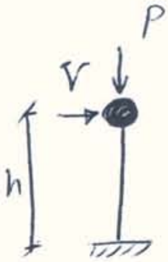
$$\rho_{jk} = \frac{8\xi^2 (1+r)\, r^{3/2}}{\left(1 - r^2\right)^2 + 4\xi^2 r\,(1+r)^2}$$

مود ۱ و ۲:

$r = \omega_2/\omega_1 = 9.82/4.59 = 2.139$

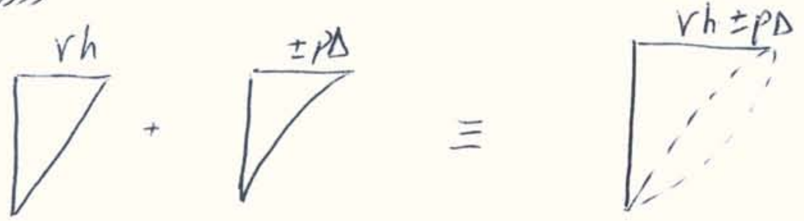
P-Δ Analysis

Structural Nonlinearity
- Material Non.
- Geometric Non. / Kinematic / Second-Order
- Large Displacement Non.



$M = vh$ ← معادله تعادل بر اساس هندسه تغییر شکل نیافته ← اصل جمع آثار برقرار است

$M = vh \pm p$ ← " " " یافته ← اصل جمع آثار مشکل دارد.



+P کششی → کاهش M

−P فشاری → افزایش M

$$M = vh + P\Delta \longrightarrow V = \underbrace{\left(\frac{M}{h\Delta} - P\right)}_{\text{سختی کاهش یافته توسط نیروی فشاری}}\Delta$$

* در حالت تحلیل مرتبه اول سختی لازم بود ← $V = \frac{3EI}{l^3}\Delta$

* این اثر زمانی مهم می‌شود که P یا Δ زیاد باشند (ساختمان‌های نسبتاً بلند، لاغر و ...)
* اثرات دیگری غیرخطی می‌توانند باعث غیرخطی شدن شوند مانند شرایط مرزی (Contact element)
* روش Sap و Etabs: ماتریس سختی بر اساس اثر بارگذاری ثقلی در تحلیل P-Δ تصحیح می‌شود و از این ماتریس برای تمامی انواع تحلیل‌های دیگر استفاده می‌گردد. در این حالت از جمع آثار قوا (ترکیبات بارگذاری) استفاده می‌شود چون همگی دارای ماتریس سختی مشابهی هستند.
* بهتر است از آنالیز بدون P-Δ شروع شود سپس P-Δ و در نهایت هم از Large Dis. استفاده گردد.
* ضرایب بار ثقلی در ترکیب بارگذاری ثقلی (که شامل زلزله است) به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود ← کنترل نیرو

کنترل تغییرمکان ← کلیه ضرائب ثقلی = 1

15th story: $P_{cr} = 228(12)/0.0522 = 52.414$ kips

10th story: $P_{cr} = 435(12)/0.0609 = 85.714$ kips

5th story: $P_{cr} = 642(12)/0.0582 = 132.371$ kips

The corresponding magnification factors assuming $\gamma = \phi = 1.0$ are:

for the 15th story:

$$\mu = \frac{1}{1 - 7427/52.414} = 1.165$$

for the 10th story:

$$\mu = \frac{1}{1 - 13.616/85.714} = 1.189$$

for the 5th story:

$$\mu = \frac{1}{1 - 19.806/132.371} = 1.176$$

and the magnified story drifts are:

for the 15th story:

$\mu\Delta = 1.165(0.0522) = 0.0608$ ft

for the 10th story:

$\mu\Delta = 1.189(0.0609) = 0.0724$ ft

for the 5th story:

$\mu\Delta = 1.176(0.0582) = 0.0684$ ft

A large-deformation analysis of this building[7-23] indicates story drifts of 0.0607 ft, 0.0723 ft, and 0.0686 ft for the 15th, 10th, and 5th stories, respectively.

7.4.3 Approximate P-Delta Analysis

Three methods for approximate P-delta analysis of building structures are presented in this section: the iterative P-delta method; the direct P-delta method; and the negative bracing member method. All three methods are shown to be capable of providing accurate estimates of P-delta effects.

Iterative P-Delta Method The iterative P-delta method[7-16, 7-24, 7-25, 7-26] is based on the simple idea of correcting first-order displacements, by adding the P-delta shears to the applied story shears. Since P-delta effects are cumulative in nature, this correction and subsequent reanalysis should be performed iteratively until convergence is achieved. At each cycle of iteration a modified set of story shears are defined as:

$$\sum V_i = \sum V_1 + \left(\sum P\right)\Delta_{i-1}/h \qquad (7\text{-}20)$$

where ΣV_i is the modified story shear at the end of ith cycle of iteration, ΣV_1 is the first-order story shear, ΣP is the sum of all gravity forces acting on and above the floor level under consideration, Δ_{i-1} is the story drift as obtained from first-order analysis in the previous cycle of iteration, and h is the story height for the floor level under consideration. Iteration may be terminated when $\sum V_i \approx \sum V_{i-1}$ or $\Delta_i \approx \Delta_{i-1}$.

Generally for elastic structures of reasonable stiffness, convergence will be achieved within one or two cycles of iteration[7-16]. One should note that since the lateral forces are being modified to approximate the P-delta effect, the column shears obtained will be slightly in error [7-16]. This is true for all approximate methods which use sway forces to approximate the P-delta effect.

EXAMPLE 7-1

For the 10 story moment resistant steel frame shown in Figure 7-14, modify the first-order lateral displacements to include the P-delta effects by using the Iterative P-delta Method. The computed first-order lateral displacements and story drifts for the frame are

Table 7-1. Applied forces and computed First-Order Displacements for the 10-story frame.

Level	Story height h, in.	Gravity force ΣP, kips	Lateral load V, kips	Story shear ΣV_1, kips	Lateral disp. D_1, in.	Story drift Δ_1, in.
10	144	180	30.22	30.22	7.996	0.517
9	144	396	21.94	52.17	7.479	0.736
8	144	612	19.57	71.74	6.743	0.785
7	144	828	17.20	88.93	5.958	0.907
6	144	1044	14.83	103.76	5.051	0.899
5	144	1260	12.45	116.21	4.152	0.914
4	144	1476	10.08	126.30	3.238	0.833
3	144	1692	7.71	134.01	2.400	0.867
2	144	1908	5.34	139.34	1.533	0.768
1	180	2124	2.97	142.31	0.765	0.765

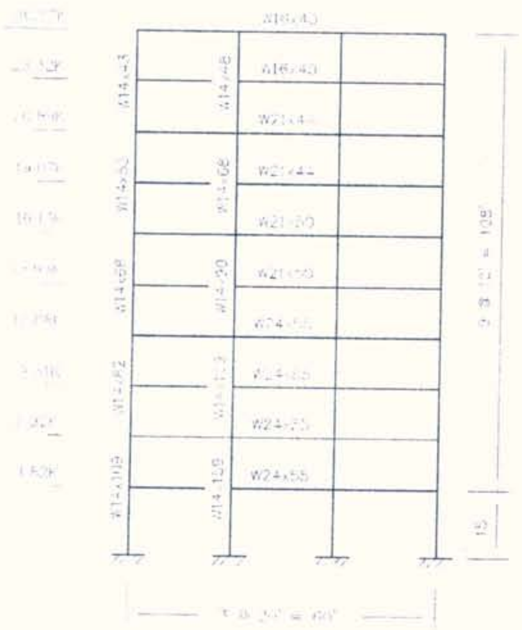


Figure 7-14. Elevation of the story moment frame used in Example 7-1.

shown in Table 7-1. The tributary width of the frame is 30 ft. The gravity load is 100 psf on the roof and 120 psf on typical floors. Use center-to-center dimensions.

The calculations for this example using the iterative P-delta method are presented in Tables 7-2 and 7-3. The convergence was achieved in two cycles of iteration. Table 7-3 also shows results obtained by an "exact" P-delta analysis.

To further explain the steps involved in the application of this method, let us consider the bent at the 8th level of the frame. The story height (h) is 12 feet (144 in.), the total gravity force at this level (ΣP) is 612 kips, the story shear (ΣV) is 71.74 kips, and the first-order story drift is 0.785 inches (see Table 7-1).

The P-Delta Contribution to the story shear is:

$$\frac{(\Sigma P)\Delta_1}{h} = \frac{(612)(0.785)}{144} = 3.34 \text{ kips}$$

and the modified story shear is:

$$\Sigma V_2 = \Sigma V_1 + (\Sigma P)\,\Delta_1 / h$$
$$= 71.74 + 3.34 = 75.08 \text{ kips}$$

Repeating this operation for all stories results in a modified set of story shears, from which a modified set of applied lateral forces is obtained (Table 7-2). A new first-order analysis of the frame subjected to these modified lateral forces results in a modified set of lateral displacements (D_2) and story drifts (Δ_2) as shown in Table 7-2. The maximum displacement obtained from the second analysis was 8.478 in., which is 9% larger than the original first-order displacement. Hence, a second iteration is necessary. Again performing the calculations for the bent at the 8th floor:

$$\frac{(\Sigma P)\,\Delta_2}{h} = \frac{(612)(0.823)}{144} = 3.50 \text{ kips}$$

$$\Sigma V_3 = \Sigma V_2 + (\Sigma P)\,\Delta_2 / h$$
$$= 71.74 + 3.50 = 75.24 \text{ kips}$$

Another first-order analysis for the new set of lateral forces indicates a maximum displacement of 8.508 inches, which is less than

Table 7-2. Iterative P-delta method (First cycle of iteration)

Level	$(\Sigma P)\,\Delta_1 / h$, kips	$\Sigma V_1+(\Sigma P)\,\Delta_1 / h$, kips	Modified lateral Force V_2, kips	Modified lateral Disp. D_2, in.	Modified story Drift Δ_2, in.
10	0.65	30.87	30.87	8.478	0.533
9	2.02	54.19	23.32	7.945	0.767
8	3.34	75.08	20.89	7.178	0.823
7	5.22	94.15	19.07	6.355	0.959
6	6.52	110.28	16.13	5.396	0.955
5	8.00	124.21	13.93	4.441	0.976
4	8.59	134.89	10.68	3.465	0.897
3	10.19	144.20	9.31	2.568	0.930
2	10.18	149.52	5.32	1.638	0.823
1	9.03	151.34	1.82	0.815	0.815

Table 7-3. Iterative P-delta method (Second cycle of iteration)

Level	$(\Sigma P)\,\Delta_2 / h$, kips	$\Sigma V_2+(\Sigma P)\,\Delta_2 / h$, kips	Modified lateral Force V_3, kips	Modified lateral Disp. D_3, in.	Modified story Drift Δ_3, in.
10	0.67	30.89	30.89	8.508 (8.510)	0.534 (0.534)
9	2.11	54.28	23.39	7.975 (7.976)	0.768 (0.768)
8	3.50	75.24	20.96	7.207 (7.209)	0.825 (0.825)
7	5.51	94.44	19.20	6.382 (6.384)	0.962 (0.963)
6	6.92	110.68	16.24	5.419 (5.421)	0.959 (0.959)
5	8.54	124.75	14.07	4.461 (4.462)	0.980 (0.980)
4	9.19	135.49	10.74	3.480 (3.481)	0.900 (0.901)
3	10.93	144.94	9.45	2.580(2.581)	0.935 (0.935)
2	10.90	150.24	5.30	1.645 (1.646)	0.827 (0.827)
1	9.62	151.93	1.69	0.818 (0.819)	0.818 (0.819)

[a] Values in parentheses represent results of an "exact" P-delta analysis.

1% larger than the displacements obtained in the previous iteration. Hence, the iteration was terminated at this point.

The first-order and second-order lateral displacements and story drifts are shown in Figures 7-15 and 7-16. As indicated by these figures, the results are virtually identical to the exact results.

Direct P-Delta Method The direct P-delta method[7-16] is a simplification of the iterative method. Using this method, an estimate of final deflections is obtained directly from the first order deflections.

The simplification is based on the assumption that story drift at the *i*th level is proportional only to the applied story shear at that level (ΣV_i). This assumption allows the treatment of each level independent of the others.

If F is the drift caused by a unit lateral load at the *i*th level, then the first order drift Δ_1 is:

$$\Delta_1 = F\,\Sigma V_1 \tag{7-21}$$

After the first cycle of iteration,

$$\Delta_2 = F\,\Sigma V_2 = F(\Sigma V_1)\left(1+(\Sigma P)\frac{F}{h}\right) \tag{7-22}$$

and after the i th cycle of iteration:

$$\Delta_{i+1} = F\Sigma V_1\left[1+\left((\Sigma P)\frac{F}{h}\right)+\left((\Sigma P)\frac{F}{h}\right)^2 +\cdots+\left((\Sigma P)\frac{F}{h}\right)^i\right] \tag{7-23}$$

$$\gamma = 1 + 0.22\frac{4(G_A - G_B)^2 + (G_A + 3)(G_B + 2)}{[(G_A + 2)(G_B + 2) - 1]^2} \qquad (7\text{-}27)$$

where G_A and G_B are the stiffness ratios as defined in Section 7.4.1. The flexibility factor γ has a rather small range of variation (from 1.0 for $G_A = G_B = \infty$. to 1.22 for $G_A = G_B = 0$.). For design purposes a conservative average value of γ can be used for the entire frame. Lai and MacGregor[7-26] suggest an average value of γ = 1.15, while Stevens[7-10] has proposed an average value of γ = 1.11.

To include the C-S effect in the previously discussed P-delta methods, it is sufficient to use $\gamma\Sigma P$ instead of ΣP wherever the term ΣP appears.

EXAMPLE 7-4

For the 10-story frame of Example 7-1, compute the second-order displacements and story drifts at the first, fifth, and the roof levels by the modified direct P-delta method. An average value of γ = 1.11 is assumed for all calculations.

Using the values listed in Table 7-4 we have:

- at the roof:

$$\frac{\gamma(\Sigma P)\Delta_1}{(\Sigma V_1)h} = \frac{(1.11)(180)(0.517)}{(30.22)(144)} = 0.024$$

$$\mu = \frac{1}{1 - 0.024} = 1.025$$

$$\Delta_2 = \mu\Delta_1 = (1.025)(0.517) = 0.530\,\text{in.}$$

- at the fifth level:

$$\frac{\gamma(\Sigma P)\Delta_1}{(\Sigma V_1)h} = \frac{(1.11)(1260)(0.914)}{(116.21)(144)} = 0.076$$

$$\mu = \frac{1}{1 - 0.076} = 1.082$$

$$\Delta_2 = \mu\Delta_1 = (1.082)(0.914) = 0.989\,\text{in.}$$

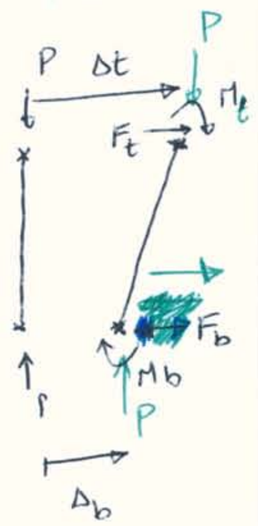
- and at the first level:

$$\frac{\gamma(\Sigma P)\Delta_1}{(\Sigma V_1)h} = \frac{(1.11)(2124)(0.765)}{(142.31)(180)} = 0.070$$

$$\mu = \frac{1}{1 - 0.070} = 1.075$$

$$\Delta_2 = \mu\Delta_1 = (1.075)(0.765) = 0.822\,\text{in.}$$

Comparison of these results with those obtained by the original method reveals an increase of less than 1% in the story drifts due to this modification.



7.4.4 "Exact" P-Delta Analysis

Construction of the geometric stiffness matrix is the backbone of any exact second-order analysis. The same matrix is also essential for any finite element buckling analysis procedure. In this section, the concept of geometric stiffness matrix is introduced, and a general approach to "exact" second-order structural analysis is discussed.

Consider the deformed column shown in Figure 7-18. For the sake of simplicity, neglect the axial deformation of the member, and the small C-S effect. The slope deflection equations for this column can be written as[7-12]

$$M_t = \frac{EI}{L}\left(4\theta_t + 2\theta_b - \frac{6\Delta_t}{L} + \frac{6\Delta_b}{L}\right) \qquad (7\text{-}28)$$

$$M_b = \frac{EI}{L}\left(2\theta_t + 4\theta_b - \frac{6\Delta_t}{L} + \frac{6\Delta_b}{L}\right) \qquad (7\text{-}29)$$

From force equilibrium:

$$F_t = -\frac{M_t + M_b}{L} - \frac{P(\Delta_t - \Delta_b)}{L} \qquad (7\text{-}30)$$

$$F_b = -F_t \qquad (7\text{-}31)$$

Substituting Equations 7-28 and 7-29 into Equation 7-30:

$$F_t = -\frac{6EI}{L^2}(\theta_t + \theta_b) + 12\left(\frac{EI}{L^3} - \frac{P}{L}\right)(\Delta_t - \Delta_b) \quad (7\text{-}32)$$

Now if we rewrite the above equations in a matrix form, we obtain:

$$\begin{bmatrix} M_t \\ M_b \\ F_t \\ F_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} - \frac{P}{L} & -\frac{12EI}{L^3} + \frac{P}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} + \frac{P}{L} & \frac{12EI}{L^3} - \frac{P}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \theta_b \\ \Delta_t \\ \Delta_b \end{bmatrix} \quad (7\text{-}33)$$

Since we wrote the equilibrium equations for the deformed shape of the member, this is a second-order stiffness matrix. Notice that the only difference between this matrix, and a standard first-order beam stiffness matrix, is the presence of P/L or geometric terms. The stiffness matrix given by Equation 7-33 can also be written as:

$$[K] = [K_f] - [K_g] \quad (7\text{-}34)$$

where $[K_f]$ is the standard first-order stiffness matrix (material matrix) and $[K_g]$ is the geometric stiffness matrix given by:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +P/L & -P/L \\ 0 & 0 & -P/L & +P/L \end{bmatrix}$$

Inspection of the simple second-order stiffness matrix given by Equation 7-33 shows why general second-order structural analysis has an iterative nature. The matrix includes P/L terms, but the axial force P is not known before an analysis is performed. For the first analysis cycle, P can be assumed to be zero (standard first-order analysis). In each subsequent analysis cycle, the member forces obtained from the previous cycle are used to form a new geometric stiffness matrix, and the analysis continues until convergence is achieved. If inelastic material behavior is to be considered, then the material stiffness matrix must also be revised at appropriate steps in the analysis.

Substantial research has been performed on the formulation of geometric stiffness matrices and finite element stability analysis of structures[7-28,7-36]. A complete formulation of the three-dimensional geometric stiffness matrix for wide flange beam-columns has been proposed by Yang and McGuire[7-36].

The common assumption that floor diaphragms are rigid in their own plane, allows condensation of lateral degrees of freedom into three degrees of freedom per floor level: two horizontal translations and a rotation about the vertical axis. This simplification significantly reduces the effort required for an "exact" second-order analysis. A number of schemes have been developed to permit direct and non-iterative inclusion of P-Delta effects in the analysis of rigid-diaphragm buildings[7-37, 7-38, 7-39].

The geometric stiffness matrix for a three dimensional rigid diaphragm building is given in Figure 7-19[7-37, 7-38]. For a three-dimensional building with N floor levels, $[K_g]$ is a $3N \times 3N$ matrix. For planar frames, the matrix reduces to an $N \times N$ tridiagonal matrix. The non-zero terms of this matrix are given by:

$$\alpha_i = \frac{(\Sigma P)_i}{h_i} + \frac{(\Sigma P)_{i+1}}{h_{i+1}} \quad (7\text{-}35)$$

$$\beta_i = \frac{(\Sigma T)_i}{h_i} + \frac{(\Sigma T)_{i+1}}{h_{i+1}} \quad (7\text{-}36)$$

$$\eta_i = -\frac{(\Sigma P)_i}{h_i} \tag{7-37}$$

$$\lambda_i = -\frac{(\Sigma T)_i}{h_i} \tag{7-38}$$

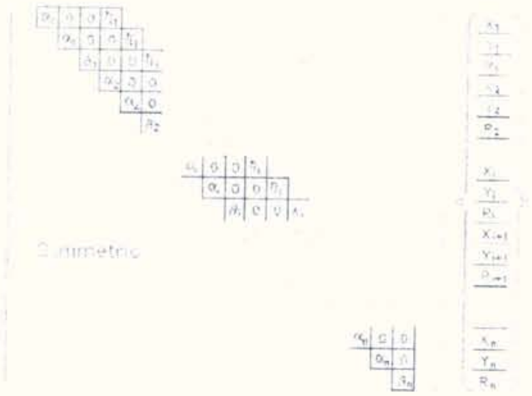


Figure 7-18. Geometric stiffness matrix for three-dimensional rigid diaphragm buildings.

where h_i is the floor height for level i, P_i is weight of the i th level, T_i is the second-order story torque, and

$$(\Sigma P)_i = \sum_{j=i}^{n} P_j \tag{7-39}$$

$$(\Sigma T)_i = \sum_{j=i}^{n} T_j \tag{7-40}$$

$(\Sigma P)_i$ can also be represented in terms of story mass, m_i, and gravitational acceleration, g, as

$$(\Sigma P)_i = \left(\sum_{j=i}^{n} m_j\right) \times g \tag{7-41}$$

The story torque, T_i, is given by [7-38]

$$T_i = \left(\sum_{j=i}^{n} p_j d_j^2\right)\frac{\theta}{h_i} \tag{7-42}$$

where p_j is the vertical force carried by the jth column, d_j is the distance of jth column from the center of rotation of the floor, and θ is an imposed unit rigid body rotation of the floor. Assuming that the dead load is evenly distributed over the floor and that a roughly uniform vertical support system is provided over the plan area of the floor, Equation 7-42 can be further simplified to

$$T_i = m_{Ri} \frac{g}{h_i} \tag{7-43}$$

where m_{Ri} is the rotational mass moment of inertia of the ith floor and g is the gravitational acceleration. The approximation involved in the derivation of Equation 7-43 is usually insignificant[7-39]. Hence, for most practical problems, Equation 7-43 can be used instead of Equation 7-42, thereby allowing the direct inclusion of the P-delta effect in a three dimensional structural analysis.

7.4.5 Choice of Member Stiffnesses for Drift and P-Delta Analysis

A common difficulty in seismic analysis of reinforced concrete structures is the selection of a set of rational stiffness values to be used in force and displacement analyses. Should one use gross concrete section properties? Should one use some reduced section properties? Or should the gross concrete properties be used for one type of analysis and reduced section properties be used for another type of analysis?

The seismic design codes in the United States are not specific about this matter. Hence, the choice of section properties used in lateral analysis in general, and seismic analysis in particular, varies widely.

Contributing to the complexity of this issue, are the following factors:

1. Although elastic material behavior is usually assumed for the sake of simplicity, reinforced concrete is not a homogeneous, linearly elastic material.
2. Stiffness and idealized elastic material properties of a reinforced concrete section vary with the state of behavior of the section (e.g. uncracked, cracked and ultimate states).